Diskrete Mathematik Übung 2

Maarten Behn, Felix Lück

28. Oktober 2025

Aufgabe 2.1

$$t^n = \left(\sum_{k=1}^{t} 1\right)^n \overset{\text{Multinomial theorem}}{=} \sum_{k_1+\ldots+k_t=n} \left(\binom{n}{k_1,\ldots,k_n} \prod_{i=1}^{t} 1^{k_i}\right) = \sum_{k_1+\ldots+k_t=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_n}$$

Aufgabe 2.2

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{t}(-1)^{k+1}\right)^n &= \sum_{k_1+\ldots+k_t=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_t} 1^{k_1+k_3+k_5+\ldots}(-1)^{k_2+k_4+k_6+\ldots} \\ &= \sum_{k_1+\ldots+k_t=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_t} (-1)^{k_2+k_4+k_6+\ldots}\end{aligned}$$

und

$$\sum_{k=1}^{t}(-1)^{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } t \text{ ungerade.}\end{cases} \implies \left(\sum_{k=1}^{t}(-1)^{k+1}\right)^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } t \text{ ungerade.}\end{cases}$$

also gilt

$$\sum_{k_1+\ldots+k_t=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_t} (-1)^{k_2+k_4+k_6+\ldots} = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } t \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Aufgabe 2.3

Ist n ungerade so gilt nach Umordnung der Summenglieder

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{n-k}^2\right) = 0$$

Sei nun n gerade und $x \geq 0$, so gilt:

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-1)^{n-k} \tag{1}$$

$$=(\sqrt{x}-1)^n(\sqrt{x}+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{x}^k (-1)^{n-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{x}^k\right) \tag{2}$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten von $x^{\frac{n}{2}}$, so erhält man von (1)

$$c = (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}}$$

und von (2)

$$c = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$$

also sind beide Terme gleich.

Aufgabe 2.4

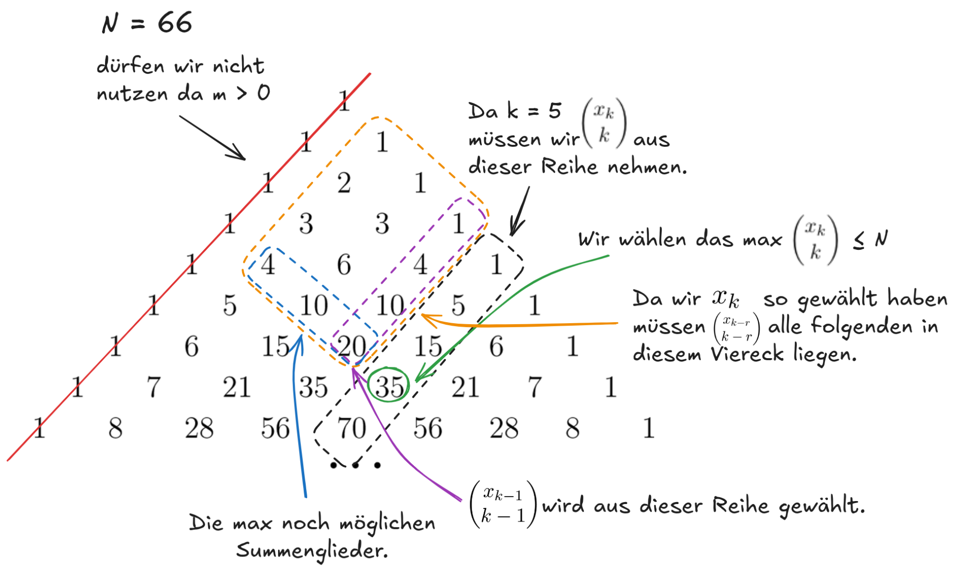

Abbildung 1: Coole Skizze von was wir hier versuchen

Zunächst eine Gleichung:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} = \dots = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \dots + \binom{n-k}{0}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-k}{j} \implies \binom{n+1}{k} - 1 = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-k}{j} - 1 = \sum_{j=1}^{k} \binom{n+j-k}{j} \qquad \oplus$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die maximal mögliche Summe wenn x_k gewählt wurde um genau 1 kleiner ist als $\binom{x_k+1}{k}$.

Existenz

Seien $N, k > 0$, so lässt sich die Summe iterativ angeben durch die Konstruktion:

$$x_{k-r} := \max \left\{ n \in \mathbb{N}; \binom{n}{k-r} \leq N - \sum_{i=k-r+1}^{k} \binom{x_i}{i} \right\}$$

Hierbei wird m definiert als der Index an dem

$$N = \sum_{i=m}^{k} \binom{x_i}{i}$$

Diese Konstruktion funktioniert für alle N, k, denn die Gleichung $\oplus$ garantiert, dass wenn

$$\binom{n}{k-r} > N - \sum_{i=k-r+1}^{k} \binom{x_i}{i}$$

so ist die maximal mögliche Summe mit $x_{k-r} := n - 1$ immernoch $\geq N$.
Zudem die minimale Zahl für x_{k-r} ist $k - r$ also ist die minimale Zahl die summert wird 1. Somit können rekursiv alle Zahlen erreicht werden.

Eindeutigkeit

Seien $1 \leq m \leq x_m < ... < x_k$ so, dass

$$N = \sum_{i=m}^{k} \binom{x_i}{i}$$

Versucht man nun für irgendein $j \in \{m, m+1, ..., k-1, k\}$ x_j durch ein $y_j > x_j$ zu ersetzen, so ist

$$\sum_{i=j+1}^{k} \binom{x_i}{i} + \binom{y_j}{j} \geq \sum_{i=j+1}^{k} \binom{x_i}{i} + \binom{x_j+1}{j} > \sum_{i=j+1}^{k} \binom{x_i}{i} + \binom{x_j+1}{j} - 1$$
$$\overset{\oplus}{=} \sum_{i=j+1}^{k} \binom{x_i}{i} + \sum_{i=1}^{j} \binom{x_j+i-j}{i} \geq \sum_{i=m}^{k} \binom{x_i}{i} = N$$

da $x_m < x_{m+1} < ... < x_j$. Somit kann eine beliebige Summe in der irgendein x_j vergrößert wird nicht N ergeben.
Versucht man stattdessen x_j durch $y_j < x_j$ zu ersetzen, so ist

$$\sum_{i=j+1}^{k} \binom{x_i}{i} + \sum_{i=1}^{j} \binom{y_j+i-j}{i} \overset{\oplus}{=} \sum_{i=j+1}^{k} \binom{x_i}{i} + \binom{y_j+1}{j} - 1 < \sum_{i=m}^{k} \binom{x_i}{i} = N$$

Da $x_m < x_{m+1} < ... < x_k$ ist

$$\sum_{i=1}^{j} \binom{y_j+i-j}{i}$$

die größtmögliche Summe die den Term $\binom{y_j}{j}$ enthält, also kann jede Summe in der ein beliebiger Term x_j verringert wird nicht N ergeben.
Offensichtlicherweise wird die Summe auch nicht N ergeben, wenn wir nur m verändern ohne die x_j zu verändern, also sind durch die Angabe von N und k alle Werte $m, x_m, ..., x_k$ eindeutig bestimmt.