Diskrete Mathematik Übung 3

Maarten Behn, Felix Lück

3. November 2025

Aufgabe 3.1

$$n = \begin{cases} 0 & a > b+1 \\ \binom{b+1}{a} & \text{sonst} \end{cases}$$

Erklärung

Es gibt im String b viele Einsen. Da keine zwei Nullen auf einander folgen dürfen kann eine Null zwischen zwei Einsen, am Anfang oder am Ende plaziert werden. Also gibt es $b+1$ Positionen wo eine Null plaziert werden kann. Wenn $a > b+1$ dann gibt es nicht genügend Positionen um alle Nullen zu plazieren.

Aufgabe 3.2

(1)

Damit alle drei Teile nicht leer sind kann man $k \in \{1, ..., n-2\}$ Zahlen in einem Teil legen. Damit müssen noch $n-k$ Zahlen auf zwei weitere Teile aufgeteilt werden. Es ergibt sich die Formel:

$$S(n,3) = \sum_{k=1}^{n-2} \left(\binom{n}{k} S(n-k,2) \right) = \sum_{k=1}^{n-2} \left(\binom{n}{k} 2^{n-k-1} - 1 \right)$$

(2)

Damit alle $n-2$ Teile nicht leer sind gibt können nur entweder ein Teil drei Zahlen und der Rest nur eine oder zwei Teile zwei Zahlen und der Rest nur eine enthalten. Es ergibt sich die Formel:

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{2}$$

Aufgabe 3.3

Mann kann jedes n und k als base p Aufteilung schreiben:

$$n = n_r \cdot p^r + ... + n_1 \cdot p^1 + n_0 \cdot p^0 \quad 0 \leq n_i \leq p-1$$

$$k := k_r \cdot p^r + ... + k_1 \cdot p^1 + k_0 \cdot p^0 \quad 0 \leq k_i \leq p-1$$

Dabei ist $r \geq n$
Da p eine Primzahl kann man das Lucas' Therom nutzen

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{n_i}{k_i} \mod p$$

welches zeigt:
Um heraus zu finden ob $\binom{n}{k} \equiv 0 \mod p$ muss man nur jede Stelle von n und k in base p betrachten. Dabei muss $k_i \leq n_i$ sein denn sonst ist eine $\binom{n_i}{k_i} = 0$ und damit das ganze Produkt. Für jede Stelle i gibt es genau $n_i + 1$ zulässige Werte für k_i. Das heißt es gibt pro i $n_i + 1$ Möglichkeiten.

$$\prod_{i=0}^{r}(n_i + 1)$$

Aufgabe 3.4

" $\implies$:" Fall 1:

$$n = 0 \implies \binom{3n}{n} = \binom{0}{0} = 1$$

Fall 2: Sei $n \geq 1$ fibinär, so gilt für $(..., n_2, n_1, n_0)_2$:

$$n_k = 1 \implies n_{k\pm1} = 0$$

Damit gilt für $(..., m_2, m_1, m_0)_2 = m := 3n = (11)_2(..., n_2, n_1, n_0)_2$:

$$n_k = 1 \implies m_k = 1$$

denn m_k könnte nur 0 werden wenn $n_{k-1} = 1$ wäre was der Annahme widerspricht.
Daher dominiert die Binärform von $3n$ die Binärform von n also ist $\binom{3n}{n}$ ungerade.

"$\neg \implies \neg$:" Sei n nicht fibinär, so gilt für $(..., n_2, n_1, n_0)_2$:

$$\exists k \in \mathbb{N} : n_k = n_{k-1} = 1, n_{k-2} = 0$$

(falls alle $n_k = 1$ wähle $k = 1$, denn $n_{k-2} = n_{-1}$ ist garantiert 0). Damit gilt für $(..., m_2, m_1, m_0)_2 = m := 3n = (11)_2(..., n_2, n_1, n_0)_2$: $m_k = 0 < n_k$, da wir die Einsen von n_k und n_{k-1} aufsummieren.
Also dominiert die Binärform von $3n$ die Binärform von n nicht, also ist $\binom{3n}{n}$ gerade.