Diskrete Mathematik Übung 3

Maarten Behn, Felix Lück

10. November 2025

Aufgabe 4.1

Untere Schranke: $m^{n-m} \leq B_n$

Wir müssen nur zeigen dass es mindestens m^{n-m} Blöcke gibt.
Angenommen es gibt m Blöcke die die Zahlen von $1...m$ enthalten.
Nun teilen wir die Zahlen $m+1$ bis n auf diese Blöcke auf.
Dann kann man diese $n-m$ Zahlen in m^{n-m} Wegen aufteilen.

Striktheit

Wenn $n = 1$ ist dann ist $m = 1$ und somit gilt:

$$m^{1-1} = 1 = B_1$$

Wenn $n \geq 2$ ist gibt es immer eine Partition die nicht in der Form ensteht.
Zum Beispiel alle in ein Block.
Daher ist m^{n-m} gleich $\leq B_n$ für $n = 1$ und strikt kliner für $n \geq 2$.

Obere Schranke: $B_n \leq n!$

Dies können wir per Induktion beweisen.

Für $n = 1$

$B_1 = 1 = n!$

Für alle $i \leq n$

Pro Iteration kann man das neue i in einen der $i-1$ bestehenden oder einen neuen Block einfügen.
Damit gilt:

$$B_i \leq (i-1+1)B_{i-1} \leq (i-1+1)(i-1)! = (i-1+1)! = i!$$

Striktheit

$n = 1 : B_1 = 1 = 1!$
$n = 2 : B_2 = 2 = 2!$
$n = 3 : B_3 = 5 < 6 = 3!$

ab $n = 3$ ist $n!$ größer als B_n da wir oben gezeigt haben das

$$(n+1)B_n \leq (n+1)n!$$

gilt.
Somit ist $n!$ gleich B_n für $n \leq 2$ und strikt größer für $n \geq 3$.

Aufgabe 4.2

$n!$ bezeichnet die Nummer aller Anordnungen von $[n]$. Diese lassen sich auch als die geordneten Partitionen von $[n]$ in n Teile auffassen, was ein Teil aller geordneten Partitionen ist, somit gilt

$$n! \leq \hat{B}_n$$

Diese Ungleichung ist strikt falls es Partitionen in weniger als n Teile gibt, also wenn $n > 1$.

$$n^n = \sum_{k_1+...+k_n=n} \binom{n}{k_1, ..., k_n}$$

bezeichnet die Nummer aller Aufteilungen von $[n]$ in die Teile $k_1, ..., k_n$ wobei erlaut ist, dass k_j leer bleiben. Man kann jede geordnete Partition in m Teile als Aufteilung in die Teile $k_1, ..., k_m$ auffassen wo also $k_{m+1}, ..., k_n$ leer bleiben, somit gilt

$$\hat{B}_n \leq \sum_{k_1+...+k_n=n} \binom{n}{k_1, ..., k_n} = n^n$$

Gleichheit gilt nicht allgemein, da n^n auch Aufteilungen berücksichtigt in denen k_1 leer ist. Damit ist die Ungleichung strikt falls k_j leer sein können, also wenn $n > 1$.

Aufgabe 4.3

Sei S die Menge aller Partitionen von $[n+1]$ und für $i \in [n]$ sei $A_i \subseteq S$ die Menge aller Partitionen, so dass i und $n+1$ im selben Teil der Partition liegen. Damit ist $S \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$ die Menge aller Partitionen, in denen $n+1$ in einem einzelnen Teil liegt. Dies lässt sich offensichtlicherweise bijektiv zu der Menge aller Partitionen von $[n]$ abbilden, also $|S \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i| = B_n$.
Weiterhin lassen sich in A_i i und $n+1$ als ein Element auffassen, da sie per Definition in allen Partitionen zusammen sind. Somit ist auch $|A_i| = B_n$.
Für $I \subseteq [n]$ lässt sich mit gleichem Argument erklären, dass $|A_I| = B_{n+1-|I|}$. Hierbei gilt wie üblich $A_\emptyset := A_0 := S$.
Dadurch ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} B_n &= \left| S \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j B_{n+1-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} (-1)^{n-k} B_{n+1-(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B_{k+1} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.4

Wenn man die ersten $B_n \mod 2$ betrachtet sie man ein muster: 1, 1, 0, 1, 1, 0, ...

n	B_n	$B_n \mod 2$
0	1	1
1	1	1
2	2	0
3	5	1
4	15	1
5	52	0
6	203	1
7	877	1
8	4140	0
	...	

In dieser Aufgabe sollen wir beweisen das dieses Muster sich für immer wiederholt. Daher müssen wir nur zeigen dass:

$$B_n \equiv B_{n+3} \mod 2$$

betrachte gerade und ungerade Sterling numbers getrennt:

$$G_n := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} S(n,k)$$

$$U_n := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} S(n,k)$$

Ab hier nehmen wir alles $\mod 2$.
Nun können wir G_{n+1} und U_{n+1} in mit iherer Rekusiven definition zerlegen:

$$\begin{aligned}
G_{n+1} &= \sum_{k \text{ gerade}} S(n+1,k) \\
&= \sum_{k \text{ gerade}} (kS(n,k) + S(n,k-1)) \\
&\equiv \sum_{k \text{ gerade}} S(n,k-1)) \\
&= U_n
\end{aligned} \tag{1}$$

da

$$\sum_{k \text{ gerade}} k \cdot S(n,k) \equiv 0$$

und

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= \sum_{k \text{ ungerade}} S(n+1,k) \\
&= \sum_{k \text{ ungerade}} (kS(n,k) + S(n,k-1)) \\
&= \sum_{k \text{ ungerade}} S(n,k) + \sum_{k \text{ ungerade}} S(n,k-1)) \\
&= U_n + G_n
\end{aligned} \tag{2}$$

Dazu haben wir oben definiert das:

$$B_n = G_n + U_n$$

Und da alles mod 2 genommen wird kann man in Additionen alle G_n oder U_n die zweimal vorkommen Wegstreichen. Somit können wir zeigen

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= G_{n+1} + U_{n+1} \\ &\equiv U_n + (U_n + G_n) \\ &\equiv G_n \equiv B_n + U_n \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} B_{n+2} &\equiv B_{n+1} + U_{n+1} \\ &\equiv G_n + (U_n + G_n) \\ &\equiv U_n \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} B_{n+3} &\equiv B_{n+2} + U_{n+2} \\ &\equiv U_n + (U_{n+1} + G_{n+1}) \\ &= U_n + ((U_n + G_n) + U_n) \\ &= U_n + U_n + B_n \\ &\equiv B_n \end{aligned} \tag{5}$$

dass $B_n \equiv B_{n+3}$ ist.