Klausur

zur Lehrveranstaltung „Mathematik 3“

Sommersemester 2025

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Datum: 05. August 2025

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	**Note**
Max. Punkte	20	25	25	20	10	100	—
Erreichte Punkte							

Aufgabe 1 (maximal 20 Punkte):

Angenommen, die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, 10$ werden rein zufällig (gleichverteilt) permutiert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an der ersten Stelle der zufälligen Permutation eine Zahl steht, die kleiner oder gleich fünf ist.

Aufgabe 2 (maximal 25 Punkte):

Es sei Z eine auf $\mathbb{R}$ standardnormalverteilte Zufallsvariable, und es bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}$. Ferner sei $X = \Phi(Z)$.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

(b) Bestimmen Sie die Varianz von X.

Aufgabe 3 (maximal 25 Punkte):

Angenommen, die zufällige Wartezeit bis zum Ausfall eines Mikrochips eines bestimmten Fabrikats ist stetig gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \theta]$. Der Wert von $\theta > 0$ sei dabei unbekannt. Fernerhin angenommen, es liegt eine Zufallsstichprobe von $n \geq 1$ unabhängig voneinander betriebenen Mikrochips des betrachteten Fabrikats vor. Es bezeichne $Y_1, \ldots, Y_n$ die in der Zufallsstichprobe beobachteten Wartezeiten bis zum jeweiligen Ausfall des Mikrochips.

Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ basierend auf $Y_1, \ldots, Y_n$.

Aufgabe 4 (maximal 20 Punkte):

(a) Erläutern Sie mit eigenen Worten, was der Unterschied zwischen Nominal- und Ordinalskala ist.

(b) Erläutern Sie mit eigenen Worten, was der Unterschied zwischen Intervall- und Verhältnisskala ist.

Aufgabe 5 (maximal 10 Punkte):

Ermitteln Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten (ein kurzer Satz pro Antwort genügt).

(i) Sei X eine Zufallsvariable, die die Poisson-Verteilung mit Intensitätsparameter $\lambda = 1$ besitzt. Dann ist das Ereignis $\{X = 5\}$ stochastisch unabhängig von dem Ereignis $\{X < 0\}$.

(ii) Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X. Dann gibt es eine reelle Zahl a mit $F_X(a) = 0.5$.

(iii) Es gibt mehr als einhundert Möglichkeiten, drei Objekte aus zehn (paarweise verschiedenen) Objekten auszuwählen.

(iv) Im Bernoulli'schen Versuchsschema mit fest vorgebener Versuchsanzahl $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ und unbekannter Trefferwahrscheinlichkeit $\theta \in (0, 1)$ stimmt der Momentenschätzer für θ basierend auf der Momentenfunktion $y \mapsto y^2$ mit dem Maximum-Likelihood-Schätzer für θ überein.

(v) Bei der Anwendung eines statistischen Tests tritt ein Typ I-Fehler auf, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird.

Hinweise:

Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt, eine sinnvolle Begründung ergibt jeweils einen weiteren Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.