Klausur

zur Lehrveranstaltung „Mathematik 3“

Sommersemester 2022

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Datum: 11. August 2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	**Note**
Max. Punkte	20	25	25	20	10	100	—
Erreichte Punkte							

Aufgabe 1 (maximal 20 Punkte):

Angenommen, es werden zehn faire Würfel unabhängig voneinander geworfen. Wir erachten die Augenzahlen 1 und 2 als niedrig, die Augenzahlen 3 und 4 als mittel, und die Augenzahlen 5 und 6 als hoch.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau drei niedrige, genau drei mittlere und genau vier hohe Augenzahlen gewürfelt werden.

Hinweis:

Der numerische Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist nicht von Belang. Es reicht zur Erlangung der vollen Punktzahl die Angabe einer Formel, in welcher gewisse Konstanten, die vier Grundrechenarten sowie ggfs. Fakultäten vorkommen.

Aufgabe 2 (maximal 25 Punkte):

Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit der Lebesguedichte f_X, gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \gamma, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die reelle Konstante γ.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(c) Berechnen Sie die Varianz von X.

Hinweis:

Sollten Sie Aufgabenteile (b) und / oder (c) bearbeiten wollen, ohne Aufgabenteil (a) gelöst zu haben, so können Sie in den Aufgabenteilen (b) und / oder (c) mit einer allgemeinen Konstante $\gamma > 0$ rechnen.

Aufgabe 3 (maximal 25 Punkte):

Es werde eine Ladung Bananen untersucht, wobei die untersuchten Bananen jeweils als in Ordnung (Kategorie 1), leicht beschädigt (Kategorie 2) oder stark beschädigt (Kategorie 3) klassifiziert werden. Angenommen, diese Kategorien kommen jeweils mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten vor, wobei $\theta \in (0,1)$ unbekannt und $\alpha \in (0,1)$ bekannt sei.

Kategorie 1	Kategorie 2	Kategorie 3
$p_1(\theta) = \theta$	$p_2(\theta) = \alpha(1-\theta)$	$p_3(\theta) = (1-\alpha)\cdot(1-\theta)$

Bezeichne nun N_i die (zufällige) Anzahl der Bananen aus Kategorie $i \in \{1,2,3\}$ in einer Stichprobe vom Umfang n.

(a) Zeigen Sie, dass ein plug-in Schätzer (bzw. Momentenschätzer) für θ gegeben ist durch

$$\hat{\theta} = 1 - \frac{N_2}{n} - \frac{N_3}{n}.$$

Hinweis: Offenbar ist $\sum_{i=1}^{3} p_i(\theta) = 1$.

(b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ basierend auf N_1, N_2 und N_3.

Aufgabe 4 (maximal 20 Punkte):

Das R-Kommando

```
binom.test(15,20,p=0.5,alternative="two.sided")
```

lieferte die folgende Ausgabe:

```
Exact binomial test

number of successes = 15, number of trials = 20, p-value = 0.04139
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval: 0.5089541 0.9134285
sample estimates: probability of success = 0.75
```

(a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten, welches Hypothesentestproblem hier behandelt wird.

(b) Fällen Sie die Testentscheidung unter der Annahme, dass der Test als ein Signifikanztest zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$ durchgeführt werden soll.

Aufgabe 5 (maximal 10 Punkte):

Ermitteln Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten (ein kurzer Satz pro Antwort genügt).

(i) Es bezeichne X eine $\{0,1\}$-wertige Zufallsvariable, die auf einem nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum definiert ist. Dann existiert für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ das k-te Moment von X, und alle diese Momente haben den gleichen Wert.

(ii) Für jede Lebesguedichte f auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gibt es eine obere Schranke $K \in \mathbb{R}$ für den maximalen Funktionswert von f.

(iii) Die Varianz einer stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ für reelle Konstanten $a < b$ ist wachsend in $b - a$.

(iv) Im Bernoulli'schen Versuchsschema mit fest vorgegebener Versuchsanzahl $n \in \mathbb{N}$ ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für die unbekannte Trefferwahrscheinlichkeit θ gleich dem Momentenschätzer für θ basierend auf der Identität als Momentenfunktion.

(v) Es sei $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}), \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\})$ ein statistisches Modell mit $\Theta \subseteq \mathbb{R}$. Ferner sei $\phi : \mathcal{Y} \to \{0,1\}$ ein nicht-randomisierter statistischer Test für das Testproblem $H_0 : \theta \leq \theta^*$ versus $H_1 : \theta > \theta^*$, für vorgegebenes $\theta^* \in \mathbb{R}$. Dann ist die Typ I-Fehlerwahrscheinlichkeit von ϕ streng monoton fallend in θ^*.

<u>Hinweise:</u>

Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt, eine sinnvolle Begründung ergibt jeweils einen weiteren Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.