Klausur

zur Lehrveranstaltung „Mathematik 3“

Wintersemester 2022 / 2023

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Datum: 14. Oktober 2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	**Note**
Max. Punkte	20	25	25	20	10	100	—
Erreichte Punkte							

Aufgabe 1 (maximal 20 Punkte):

Angenommen, ein fairer Würfel wird dreimal unabhängig voneinander geworfen. Betrachten Sie die Ereignisse
A := "Die Summe der drei geworfenen Augenzahlen ist elf" sowie
B := "Die Summe der drei geworfenen Augenzahlen ist zwölf".

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ für das geschilderte Experiment an.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B)$.

(c) Der französische Spieler Chevalier de Méré vertrat einmal Pascal gegenüber die Ansicht, dass die Augensummen 11 und 12 beim dreimaligen Würfelwurf gleichwahrscheinlich sein müssten. Seine Begründung: Beide Zahlen lassen sich auf gleich viele Arten in drei Summanden aus $\{1, \ldots, 6\}$ zerlegen. Wo lag sein Denkfehler?

Hinweis:

Sollten Sie den Aufgabenteil (b) bearbeiten wollen, ohne Aufgabenteil (a) gelöst zu haben, so können Sie die Lösung zu Aufgabenteil (a) erfragen. Dann bekommen Sie jedoch automatisch 0 Punkte für Aufgabenteil (a).

Aufgabe 2 (maximal 25 Punkte):

Es sei $r > 1$ eine vorgegebene reelle Zahl. Ferner sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit der Lebesguedichte f_X, gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \gamma \cdot x^{-r}, & x > 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die reelle Konstante γ (in Abhängigkeit von r).

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X für $r = 3$.

Hinweis:

Sollten Sie Aufgabenteil (b) bearbeiten wollen, ohne Aufgabenteil (a) gelöst zu haben, so können Sie in den Aufgabenteil (b) mit einer allgemeinen Konstante $\gamma > 0$ rechnen.

Aufgabe 3 (maximal 25 Punkte):

Es sei $n \geq 1$ eine fest vorgegebene natürliche Zahl. Angenommen, es wird bei n Patient:innen, die an der gleichen Krankheit leiden, die jeweilige Zeitspanne von der Erkrankung bis zur Genesung erhoben. Diese (zufälligen) Zeitspannen werden repräsentiert durch Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$. Dabei werde angenommen, dass $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind. Ferner werde angenommen, dass die Verteilung von Y_1 eine Lebesguedichte f_θ für einen Parameter $\theta > 0$ besitzt, die gegeben ist durch

$$f_\theta(y) = \frac{2y}{\theta} \exp\left(-\frac{y^2}{\theta}\right)$$

für $y \in \mathbb{R}_{>0}$. Angenommen, der Wert von θ ist unbekannt.

(a) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ basierend auf $Y_1, \ldots, Y_n$.

(b) Zeigen Sie, dass sich der Schätzer aus Aufgabenteil (a) auch als ein Momentenschätzer auffassen lässt, und geben Sie die zugehörige Momentenfunktion an.

<u>Hinweis:</u>

Sollten Sie den Aufgabenteil (b) bearbeiten wollen, ohne Aufgabenteil (a) gelöst zu haben, so können Sie die Lösung zu Aufgabenteil (a) erfragen. Dann bekommen Sie jedoch automatisch 0 Punkte für Aufgabenteil (a).

Aufgabe 4 (maximal 20 Punkte):

Die R-Kommandos

```
augenzahlen <- c(1,2,3,4,5,6);
haeufigkeiten <- c(4, 15, 9, 15, 5, 12);
chisq.test(haeufigkeiten);
```

lieferten die folgende Ausgabe:

```
        Chi-squared test for given probabilities

data:  haeufigkeiten
X-squared = 11.6, df = 5, p-value = 0.0407
```

(a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten, welches Hypothesentestproblem hier behandelt wird.

(b) Fällen Sie die Testentscheidung unter der Annahme, dass der Test als ein Signifikanztest zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ durchgeführt werden soll.

Aufgabe 5 (maximal 10 Punkte):

Ermitteln Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten (ein kurzer Satz pro Antwort genügt).

(i) Es bezeichne X eine $\{0,1\}$-wertige Zufallsvariable, die auf einem nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum definiert ist. Dann kann die Varianz von X niemals größer sein als der Erwartungswert von X.

(ii) Es seien a und b zwei reelle Zahlen mit $a < b$. Ferner sei f eine Lebesguedichte auf dem Intervall $[a, b]$, versehen mit seiner Borel'schen σ-Algebra. Schließlich sei X eine Zufallsvariable, die die Lebesguedichte f besitzt. Dann existiert der Erwartungswert von X genau dann (in $\mathbb{R}$), wenn es eine obere Schranke $K \in \mathbb{R}$ für den Funktionswert $f(x)$ gibt, wobei $a \leq x \leq b$ gilt.

(iii) Es sei $n \geq 2$ eine fest vorgegebene, gerade natürliche Zahl, und es sei $\Omega := \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gibt es stets genau so viele Möglichkeiten, die Elemente von Ω in eine zufällige Reihenfolge zu bringen, wie (genau) $n/2$ Elemente von Ω zufällig auszuwählen.

(iv) Im Bernoulli'schen Versuchsschema mit fest vorgegebener Trefferwahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$, aber unbekannter Versuchsanzahl $\theta \in \mathbb{N}$ ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ gleich dem Momentenschätzer für θ basierend auf der Identität als Momentenfunktion.

(v) Der Annahmebereich des Einstichproben-t-Tests für das zweiseitige Testproblem $H_0 = \{\mu = 0\}$ versus $H_1 = \{\mu \neq 0\}$ ist enthalten in dem Annahmebereich des Einstichproben-t-Tests für das einseitige Testproblem $H_0 = \{\mu \leq 0\}$ versus $H_1 = \{\mu > 0\}$. Dabei bezeichnet $\mu \in \mathbb{R}$ den (unbekannten) Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit.

Hinweise:

Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt, eine sinnvolle Begründung ergibt jeweils einen weiteren Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.