Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematik 1
WS 2022/23

Übungsblatt 2

Präsenzübungen

P1. Betrachten Sie die folgende Zusammenfassung von logischen Termen:

$$\mathcal{K} = \{A \wedge \neg B\,,\, B \vee C\}$$

a) Finden Sie eine Interpretation, die $\mathcal{K}$ erfüllt.

b) Leiten Sie aus $\mathcal{K}$ den Term $\neg B$ her. Nutzen Sie dafür nur die aus der Vorlesung bekannten Schlussregeln.

c) Leiten Sie aus $\mathcal{K} \cup \{\neg B\}$ den Term C her. Nutzen Sie dafür nur die aus der Vorlesung bekannten Schlussregeln.

P2. Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von logischen Ausdrücken und seien A, B Ausdrücke. Zeigen Sie formal die beiden Schlussregeln.

a) *Reductio ad absurdum*:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{K} & A \to B \\ \mathcal{K} & A \to \neg B \\ \hline \mathcal{K} & \neg A \end{array}$$

b) *Modifizierte Widerspruchsregel*:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{K} & Q \\ \mathcal{K} & \neg Q \\ \hline \mathcal{K} & P \end{array}$$

P3. Seien A, B, C Mengen.

a) Zeigen Sie: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) Zeigen Sie: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

c) Sei $B \subseteq A$. Zeigen Sie: $B = A \setminus (A \setminus B)$

P4. Seien A und B Mengen.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

b) In der Vorlesung wurde (allgemeiner) bewiesen, dass

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Bitte wenden!

Verständnisfragen
Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle.

*1. Was ist eine Belegung eines logischen Terms?

*2. Was ist eine Interpretation eines logischen Terms?

*3. Nennen Sie drei Schlussregeln.

4. Könnte man die Widerlegungsregel (Modus tollens) $(A \to B) \wedge \neg B \implies \neg A$ auch zu $(A \to B) \wedge \neg A \implies \neg B$ umformulieren?

5. Angenommen, man hat eine Menge von Schlussregeln und leitet aus diesen Schlussregeln neue Regeln ab (Wie wir es etwa in der Vorlesung mit der Kettenschlussregel getan haben). Erhöht sich dadurch die Anzahl der Terme, die durch diese Schlussregeln hergeleitet werden können?

6. Wie funktioniert ein direkter Beweis?

7. Was ist der Unterschied zwischen einem Beweis durch Widerspruch und einem Beweis durch Kontraposition?

*8. Was ist eine Menge?

*9. Was besagen das Extensionalitätsaxiom und das Leermengenaxiom?

*10. Wann heißt eine Menge Teilmenge einer anderen Menge?

*11. Was ist die Potenzmenge einer Menge? Wie groß ist ihre Kardinalität?

*12. Was ist die Vereinigung zweier Mengen? Was ist der Durchschnitt zweier Mengen? Was ist die Differenzmenge zweier Mengen? Was ist die symmetrische Differenz zweier Mengen?

*13. Was ist das Komplement einer Menge?

14. Kann eine Menge sich selbst enthalten? Begründung?

15. Warum gibt es nicht die Menge aller Mengen?

*16. Warum ist $\emptyset \neq \{\emptyset\}$?

17. Warum gibt es nur eine leere Menge (und nicht etwa mehrere verschiedene)?

*18. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen?

19. Wie viele verschiedene k-elementigen Teilmengen hat eine Menge mit n Elementen?

20. Ist M eine Menge und N eine echte Teilmenge von M. Hat M dann immer mehr Elemente als N?

21. Sei M eine Menge und N eine Teilmenge von M. Wie viele Elemente enthält $M \setminus N$?

*22. Was ist ein geordnetes Paar?

*23. Was ist ein kartesisches Produkt zweier Mengen?

24. Welche Elemente enthält das kartesische Produkt $\{1,2\} \times \emptyset$?

25. Begründen Sie, warum im Allgemeinen $A \times B = B \times A$ nicht gilt.

26. Wie viele Elemente enthält das kartesische Produkt einer endlichen Familie von endlichen Mengen?

27. Sei $M = \{1,2\}$ und $N = \{1,2,3\}$. Geben Sie alle zweielementigen Teilmengen von $M \times N$ an.

*28. Was ist eine Familie von Mengen?

29. Was ist der Durchschnitt einer Familie von Mengen? Was ist die Vereinigung einer Familie von Mengen?