Universität Bremen

**Dr. Tim Haga**

**Mathematik 1**
**WS 2022/23**

# Übungsblatt 3

## Präsenzübungen

**P1.** Gegeben sei die Menge $M = \{a, b\}$.

a) Geben Sie alle Relationen auf $M$ an.

b) Welche der Relationen aus a) sind Äquivalenzrelationen, Halbordnungen, Totale Ordnungen?

c) Welche der Relationen aus a) sind linkstotal, rechtseindeutig, beides?

**P2.** Betrachten Sie die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Relation gegeben durch $R := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists c \in \mathbb{Z} : 5c = a - b\}$

a) Beweisen Sie, dass $R$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Geben Sie die Äquivalenzklassen von $R$ an

**P3.** In der Vorlesung wurde folgender Satz bewiesen:

**Satz 3.8.** Sei $A$ eine Menge und $R$ eine Äquivalenzrelation auf $A$ und $x, y \in A$. Dann gilt:

$$\overline{x} = \overline{y} \quad \text{oder} \quad \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset.$$

Der Beweis wird nun noch einmal in Einzelteile zerlegt wiedergegeben:

*Beweis.*

a) Angenommen $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$.

b) Dann ist $z \in \overline{x}$ und $z \in \overline{y}$,

c) also gilt $zRx$ und $zRy$.

d) Wegen der Symmetrie und Transitivität von $R$ gilt dann $xRy$

e) und nach Satz 7 aus Kapitel 3: $\overline{x} = \overline{y}$.

Erläutern Sie jeden Schritt in diesem Beweis, d. h. begründen Sie für jeden der fünf Schritte, warum die getroffenen Annahmen gelten und wie der Schluss daraus folgt.

**Bitte wenden!**

**Verständnisfragen**
Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle.

*1. Was ist eine Relation?

*2. Beschreiben sie die folgenden Eigenschaften von Relationen mit eigenen Worten: Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, Totalität, Linkstotalität, Rechtseindeutigkeit.

*3. Was ist eine Äquivalenzrelation? Was ist eine Halbordnung? Was ist eine Totale Ordnung? Was ist eine Abbildung?

4. Finden Sie Beispiele für Äquivalenzrelationen, Halbordnungen und totale Ordnungen auf $\mathbb{N}$ und auf $\mathcal{P}(M)$, wobei $M$ eine beliebige Menge ist.

5. Geben Sie ein Beispiel für eine Halbordnung, die keine totale Ordnung ist.

6. Ist $M$ eine Menge und $R$ sowohl Äquivalenzrelation als auch totale Ordnung auf $M$, was kann man dann über $M$ sagen?

*7. Was ist eine Äquivalenzklasse?

*8. Was ist eine Partition einer Menge?

9. Warum definiert eine Äquivalenzrelationen auf einer Menge eine Partition der Menge?

10. Sei $M$ eine endliche Menge mit $|M| = n \geq 0$.
    a) Wieviele Elemente muss dann eine reflexive Relation auf $M$ wenigstens enthalten?
    b) Wieviele Elemente muss dann eine symmetrische Relation auf $M$ wenigstens enthalten?
    c) Wieviele Elemente muss dann eine antisymmetrische Relation auf $M$ wenigstens enthalten?
    d) Wieviele Elemente muss dann eine transitive Relation auf $M$ wenigstens enthalten?
    e) Wieviele Elemente muss dann eine Partition von $M$ wenigstens enthalten?

11. Kann man Relationen auch zwischen mehr als zwei Mengen definieren? Wie?

*12. Wann heißt eine Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv?

13. Welche Abbildungen sind Äquivalenzrelationen?

14. Warum kann die Frage "Ist die Abbildung $f(x) = x^2$ injektiv?" nicht sinnvoll beanwtortet werden?

*15. Was ist das Bild einer Menge unter einer Abbildung?

*16. Was ist das Urbild einer Menge unter einer Abbildung?

*17. Was ist der Graph einer Abbildung?

18. Warum sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig?
19. Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig?
20. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit man zwei Abbildungen $f$ und $g$ verknüpfen kann?
21. Wann kann man sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ bilden?
22. Wie kann man eine beliebige Abbildung surjektiv machen, ohne die Abbildungsvorschrift zu ändern?
23. Wie kann man eine beliebige injektive Abbildung bijektiv machen, ohne die Abbildungsvorschrift zu ändern?