Universität
Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematik 1
WS 2022/23

Übungsblatt 7

Präsenzübungen

P1. Sei $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ eine sechselementige Menge mit einer Verknüpfung $*$ auf G, so dass G eine Gruppe ist. Vervollständigen Sie die Verknüpfungstafel:

$*$	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Hinweis: Nutzen Sie die Kürzungsregeln um zunächst herauszufinden, welches Element das neutrale Element ist.

P2. Zeigen Sie: Ist $(G, *)$ eine Gruppe, und gilt $g * g = e$ für alle $g \in G$, so ist G abelsch.

P3. Sei G eine Menge und $*$ eine assoziative Verknüpfung auf G. Zudem gebe es ein linksneutrales Element $e \in G$, d. h. für alle $g \in G$ gilt: $e * g = g$. Außerdem gebe es für jedes $g \in G$ ein linksinverses Element g^{-1} , d. h. $g^{-1} * g = e$. Zeigen Sie:

a) Für alle $g \in G$ gilt: $g * g^{-1} = e$ (jedes Linksinverse ist auch rechtsinvers).

b) Für alle $g \in G$ gilt: $g * e = g$ (das Linksneutrale ist auch rechtsneutral).

c) Das linksneutrale Element ist eindeutig bestimmt.

d) Das linksinverse Element zu g ist eindeutig bestimmt.

Hinweis: Die einzelnen Aussagen müssen in der angegebenen Reihenfolge bewiesen werden, dann kann man ab der zweiten Aussage die vorherigen Aussagen benutzen.

Bitte wenden!

Verständnisfragen

Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle.

*1. Was ist eine Gruppe?

*2. Wann heißt eine Gruppe abelsch?

*3. Was ist eine Untergruppe?

4. Geben Sie Beispiele für endliche und unendliche, abelsche und nicht-abelsche Gruppen.

5. Sind $(G, *)$ und $(H, \circ)$ Gruppen, wie kann man dann sinnvoll auf $G \times H$ eine Gruppenstruktur definieren?

6. Geben Sie die Verknüpfungstabellen für $\mathbb{Z}_3$ und und $\mathbb{Z}_6^*$ an. Was fällt Ihnen auf?

7. Gibt es abelsche Gruppen mit nichtabelschen Untergruppen?

8. Gibt es nicht-abelsche Gruppen mit nichttrivialen abelschen Untergruppen?

9. Gibt es zu jeder natürlichen Zahl n eine Gruppe der Ordnung n? Für welche $n \in N$ ist dies nicht der Fall?

10. Sind Gruppen gleicher Ordnung isomorph?

11. Besitzt jede Gruppe $G \neq \{e\}$ eine nichttriviale Untergruppe?

12. Warum ist die Abbildung $\lambda_g \colon G \longrightarrow G$ mit $\lambda_g(x) = gx$ bijektiv?

*13. Was ist ein (Gruppen-)Homomorphismus?

*14. Wie ist der Kern eines Homomorphismus defininert?

*15. Wie ist das Bild eines Homomorphismus defininert?