Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematik 1
WS 2022/23

Übungsblatt 11

Präsenzübungen

P1. Bestimmen Sie die darstellende Matrix (bzgl. der Standardbasis) der folgenden linearen Abbildung: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$

P2. Seien V, W K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ linear. Zeigen Sie:

a) f injektiv $\iff \ker f = \{0\}$

b) $\ker f$ ist ein Untervektorraum von V.

c) $\operatorname{Im} f$ ist ein Untervektorraum von W.

P3. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der linearen Abbildung mit der darstellenden reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P4. Sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ x \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $\ker \varphi$ und $\operatorname{Im} \varphi$.

Bitte wenden!

Verständnisfragen
Diese Aufgaben dienen Ihrer Selbstkontrolle.

*1. Was ist eine lineare Abbildung?

*2. Was ist eine darstellende Matrix?

3. Warum setzt man bei einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow W$ voraus, dass V und W Vektorräume über dem selben Körper K sind? Was würde passieren, wenn V und W verschiedene Grundkörper hätten?

*4. Was ist der Kern einer linearen Abbildung?

*5. Was ist das Bild einer linearen Abbildung?

*6. Was ist der Zeilenrang? Was ist der Spaltenrang?

7. Sind Zeilenrang und Spaltenrang immer gleich? Warum?

*8. Was sagt der Rangssatz?

*9. Was ist ein Eigenwert? Was ist ein Eigenvektor?

10. Warum schließt man den Nullvektor als Eigenvektor aus?