

Musterlösung zur Klausur
"Mathematik 3 für Informatiker",
SoSe 2025

Zu Aufgabe 1:

Wir modellieren wie folgt:

$\Omega = \{ \text{alle Permutationen von } \{1, 2, \dots, 1033\} \}$

$\mathcal{F} = 2^\Omega$ (Potenzmenge)

$\mathbb{P} = \text{Diskrete Gleichverteilung auf } (\Omega, \mathcal{F})$

Also ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Laplace'scher
W'Kertraum.

$$|\Omega| = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 1$$

Sei A das interessierende Zielereignis.

Dann ist nach Multiplikationsregel der
Kombinatorik:

$$|A| = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 1 = 5 \cdot 9!$$

Also:

↑ günstige
Fälle

$$R(A) = \frac{|A|}{|R|} = \frac{5 \cdot 9!}{10!} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Zu Aufgabe 2:

Berechne e die Dichtefunktion von Z .

$$(a) \mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} \Phi(z) e(z) dz$$

$$= \left[\frac{1}{2} \Phi^2(z) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$(b) \mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} [\Phi(z)]^2 e(z) dz$$

$$= \left[\frac{1}{3} \Phi^3(z) \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

↑
Verschiebungssatz

Alternative Lösung:

$X \sim \text{UNI}[0,1]$, denn $\text{supp}(X) = [0,1]$

und $\forall x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(\Phi(Z) \leq x) \\ &= P(Z \leq \Phi^{-1}(x)) = \Phi(\Phi^{-1}(x)) \\ &= x, \end{aligned}$$

da Φ stetig und strikt monoton ist.

Also ist $E[X] = E[\text{UNI}[0,1]] = \frac{1}{2}$

und $\text{Var}(X) = \text{Var}(\text{UNI}[0,1]) = 1/12,$

vgl. Momenteberechnung aus der Vorlesung.

zu Aufgabe 3:

Likelihoodfunktion von Y_1 :

$$p(y_1, \theta) = \theta^{-1} \cdot \mathbb{1}_{[0, \theta]}(y_1)$$

Likelihoodfunktion der Gesamtstichprobe:

$$L(\vec{y}, \theta) = \theta^{-n} \cdot \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, \theta]}(y_i),$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T.$$

Da $y_i > 0$ fast sicher für alle $1 \leq i \leq n$,
ist

$$L(\vec{y}, \theta) = \theta^{-n} \cdot \mathbb{1}_{\{\max_{1 \leq i \leq n} y_i \leq \theta\}}$$

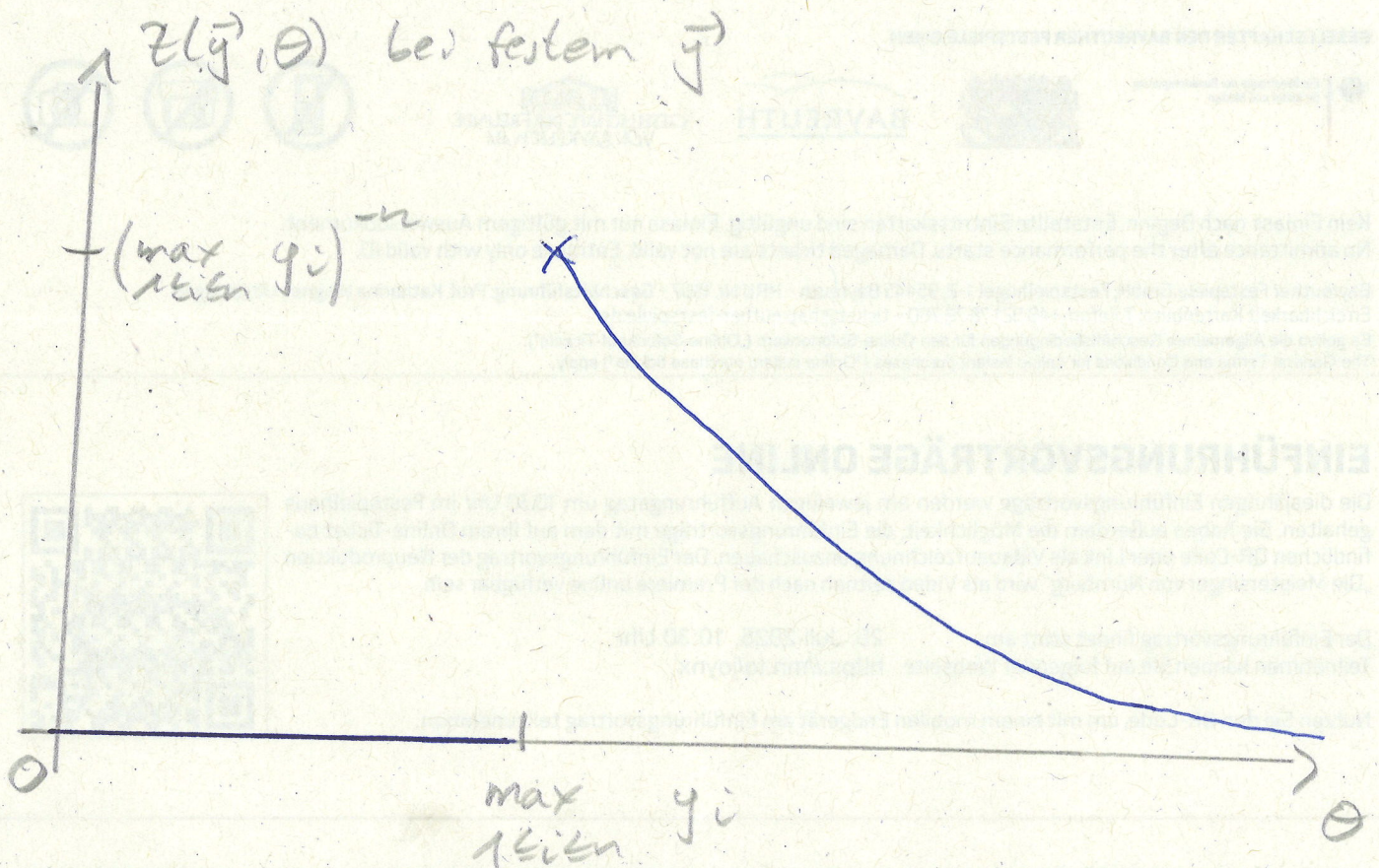
Als Funktion von θ bei festen Daten
aufgefasst springt $\theta \mapsto L(\vec{y}, \theta)$
von Null auf $[\max_{1 \leq i \leq n} y_i]^{-n}$
an der Stelle $\theta = \max_{1 \leq i \leq n} y_i$.

Für $\theta \geq \max_{i \in I} y_i$ ist $\theta \mapsto z(\vec{y}, \theta)$

stark ansteigend, fällt also ab.

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{ML} = \max_{i \in I} y_i$$

Skizze:



Zu Aufgabe 4:

(a) Im Falle der Ordinalskala kann man die Ausprägungsmöglichkeiten in eine sinnvolle Ordnung bringen. Im Falle der Nominalskala ist das nicht möglich, da dort die Ausprägungsmöglichkeiten nur Namen sind.



Benennungen

(b) Im Falle der Verhältnisskala gibt es einen natürlich vorgegebenen Null- oder Bezugspunkt. Im Falle der Intervallskala wird dieser Null- oder Bezugspunkt willkürlich festgelegt. Deswegen kann man Quotienten von Ausprägungen auf der Verhältnisskala sinnvoll interpretieren, auf der Intervallskala hingegen nicht.

zu Aufgabe 5:

- (i) Richtig, denn $\{x < 0\} = \emptyset$,
und die leere Menge ist stochastisch
unabhängig von jedem anderen
Ereignis A .

$$[P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = 0 \cdot P(A) \\ = P(\emptyset) \cdot P(A)]$$

- (ii) Falsch. Gegenbeispiel ist
 $X \sim \text{Bernoulli}(1/3)$ mit

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2/3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

- (iii) Richtig.

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120 > 100.$$

- (iv) Richtig.

In beiden Fällen ist der Schätzer
gegeben durch die relative

Häufigkeit beobachteter Treffer in
der Stichprobe. Beachte dazu, dass
 $y^2 \equiv y$ ist für $y \in \{0, 1\}$.

(v) Richtig - das ist gerade
die Definition
des Typ I-Fehlers.