

Ebenen:

• Parametergleichung ✓

$$E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$\vec{p}$ = Stützvektor

$\vec{u}, \vec{v}$ = Spannvektoren $\neq \vec{0}$

r, s = Parameter

• Koordinatengleichung ✓

$$E: 0 = a x_1 + b x_2 + c x_3 + d$$

a, b, c, d = Parameter

• Parameter $\rightarrow$ Normalgleichung

$$1. E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$$2. 0 = \vec{u}_1 \cdot \vec{h}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{h}_2 + \vec{u}_3 \cdot \vec{h}_3$$

$$0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{h}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{h}_2 + \vec{v}_3 \cdot \vec{h}_3$$

$$3. h_1, h_2 \text{ oder } h_3 = 1$$

4. nach den anderen beiden auflösen

• Normalen $\rightarrow$ Koordinatengleichung

$$1. E: 0 = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

$$2. 0 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$3. E: 0 = a x_1 + b x_2 + c x_3 + d$$

• Normalengleichung ✓

$$E: 0 = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p})$$

$\vec{p}$ = Stützvektor

$\vec{n}$ = Normalvektor

• Aufstellen:

↳ 3 Punkte: (A, B, C)

$$E: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$$

↳ Gerade, Punkt: $(g: \vec{x}, A)$

$$E: \vec{x} = \vec{p}_g + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{p_g A}$$

↳ 2 nicht-schneidende Geraden

$$\vec{u} = \vec{u}_{g: x_1} \quad \vec{v} = \vec{u}_{g: x_2} \quad \vec{p} = \vec{OS}$$

↳ 2 parallele Geraden

$$\vec{u} \neq \vec{u}_{g: x_1} \quad \vec{v} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \quad \vec{p} = \vec{p}_1$$

• Punkt auf Ebene

Punkt für $\vec{x}$ einsetzen

Wenn $0 = 0$ liegt auf Ebene sonst nicht

Mathe Arbeit

Lagebeziehungen:

Gerade / Gerade: ✓

1. $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ parallel abhängig

Wenn Ja:

2. $g: \vec{x}_1 = \vec{p}_1$

Wenn Ja: $\rightarrow$ Identisch

Wenn Nein: $\rightarrow$ Parallel

Wenn Nein:

2. $g: \vec{x}_1 \neq g: \vec{x}_2$

Wenn Nein: $\rightarrow$ Windschief

Wenn Ja: $\rightarrow$ Schnittpunkt

3. + oder r Einsetzen $\rightarrow$ Schnittpunkt

Gerade / Ebene: ✓

1. $E: d = a x_1 + b x_2 + c x_3$

2. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

2. $d = a(p_1 + t v_1) + b(p_2 + t v_2) + c(p_3 + t v_3)$

Nach t umstellen

3. t in $g: \vec{x}$ einsetzen $\rightarrow$ Schnittpunkt

1. $E: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$

2. $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$

2. $E: \vec{x} = g: \vec{x}$

3. Nach t auflösen

Parallel: $\rightarrow$ keine Lösung für t

Identisch: $\rightarrow$ unendlich viel L. für t

• Ebene / Ebene ✓

1. $E: \vec{x} = \vec{p}_1 + r \cdot \vec{u}_1 + s \cdot \vec{v}_1$

$E: d = a x_1 + b x_2 + c x_3$

2. $d = a \cdot (\vec{p}_1 + r \vec{u}_1 + s \vec{v}_1) + b (\vec{p}_2 + r \vec{u}_2 + s \vec{v}_2) + c (\vec{p}_3 + r \vec{u}_3 + s \vec{v}_3)$

3. Noch r oder s auflösen

4. r oder s in $E: \vec{x}$ einsetzen $\rightarrow$ Schnittgerade

1. $E: \vec{x}_1 = \vec{p}_1 + r_1 \cdot \vec{u}_1 + s_1 \cdot \vec{v}_1$

$E: \vec{x}_2 = \vec{p}_2 + r_2 \cdot \vec{u}_2 + s_2 \cdot \vec{v}_2$

2. $E: \vec{x}_1 = E: \vec{x}_2$

3. Noch r_1 und s_1 oder r_2 und s_2 auflösen

z.B. $r_1 = 2 s_1$

4. r oder s in die $E: \vec{x}$ -Gleichung einsetzen

$\rightarrow$ Schnittgerade

parallel: $\rightarrow$ keine Lösung
parallel: $\rightarrow$ keine Lösung
identisch: $\rightarrow$ unendlich viel Lösungen

Mathe Arbeit

Geraden:

• Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v}$$

$\vec{p}$ = Stützvektor

$\vec{v}$ = Richtungsvektor

r = Parameter

• Aufstellen

Punkte: A, B

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$$

• Punkt auf Gerade

Prüft für $\vec{x}$

einsetzen.

Wenn $a_{11} \rightarrow$ liest auf

Gerade sonst nicht.

Vektoren:

• Betrag:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

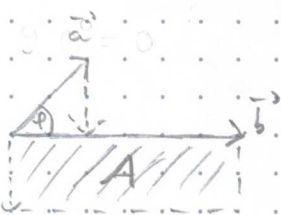
• Normalvektor

$$\vec{a}_0 = \vec{a} / |\vec{a}|$$

• Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1$$

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$



$$A = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Winkel:

• Vektoren $(\vec{a}, \vec{b})$

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

• 2 Geraden $(g: \vec{x}_1, g: \vec{x}_2)$

$$\vec{a} = \vec{v}_1, \vec{b} = \vec{v}_2 \text{ mit } \cos(\varphi)$$

• Gerade, Ebene $(g: \vec{x}_1, E: \vec{x}_2)$

$$\vec{a} = \vec{v}_1, \vec{b} = \vec{n} \text{ mit } \sin(\varphi)$$

• 2 Ebenen $(E: \vec{x}_1, E: \vec{x}_2)$

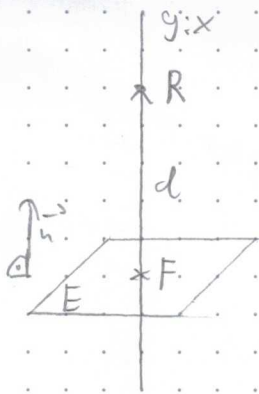
$$\vec{a} = \vec{n}_1, \vec{b} = \vec{n}_2 \text{ mit } \cos(\varphi)$$

Mathe Abstandsprobleme:

Punkt - Punkt

$$d = |\vec{A} - \vec{B}|$$

Punkt - Ebene



Punkt: $R(2|0|1)$

Ebene: $E: x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1. Normalvektor erstellen

2. Hilfsgerade mit R und $\vec{h}$

$$g: x = \vec{OR} + t \vec{h}$$

3. Gerade in Ebene einsetzen

$$(2+t) + 8(8t) - 4(1-4t) = 25$$

4. Nach t auflösen

$$\rightarrow t = \frac{1}{3}$$

5. $F =$ Gerade mit t

$$6. d = |\vec{FR}|$$

Gerade - Ebene

- Wenn nicht parallel $d=0$

- Wenn parallel Punkt - Ebene mit zufälligen Punkt von Gerade

Ebene - Ebene

- Wenn nicht parallel $d=0$

- Wenn parallel Punkt - Ebene mit zufälligen Punkt von Ebene

Punkt - Gerade

Möglichkeit 1:

Punkt R

Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$

Möglichkeit 2:

$$d = \frac{|(\vec{R} - \vec{a}) \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Möglichkeit 3:

1. Hilfs Ebene erstellen $E: 0 = \vec{b} \cdot (\vec{x} - R)$

2. Ebene in Koordinatenform $E: 0 = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d$

3. Gerade in Ebene einsetzen und nach t auflösen

4. t in Gerade einsetzen $\rightarrow$ Punkt P

5. $d = |\overrightarrow{PR}|$

Möglichkeit 4:

1. Hilfs Ebene erstellen $E: 0 = \vec{b} \cdot (\vec{x} - R)$

2. Gerade für $\vec{x}$ einsetzen

3. Nach t auflösen

4. t in Gerade einsetzen $\rightarrow$ Punkt P

5. $d = |\overrightarrow{PR}|$

Gerade - Gerade

Wenn parallel: Punkt - Gerade mit erfülligen Punkt

Wenn nicht parallel:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{b} \quad h: \vec{x} = \vec{c} + s\vec{d}$$

Möglichkeit 1:

$$d = \frac{|(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{h}|}{|\vec{h}|}$$

$$\vec{h} = \vec{b} \times \vec{d}$$

Möglichkeit 2:

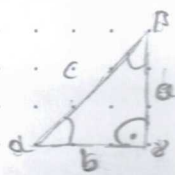
$$P_g = \vec{a} + t\vec{b} \quad P_h = \vec{c} + s\vec{d}$$

$$\vec{P_g P_h} = P_g - P_h$$

$$\text{I } \vec{P_g P_h} \cdot \vec{b} \quad \text{nach } s \text{ und } t \text{ lösen}$$

$$\text{II } \vec{P_g P_h} \cdot \vec{d}$$

Winkel an Lassen bei 90°



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) \quad \gamma = 90^\circ$$

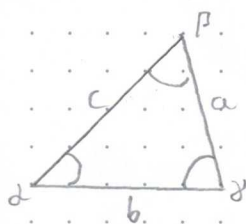
$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \quad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c} \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\tan(\beta) = \frac{b}{a} \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$



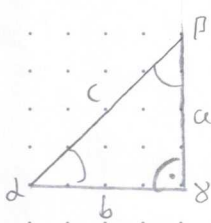
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

$$a = b \cdot \cos(\gamma) + c \cdot \cos(\beta)$$

$$b = c \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\gamma)$$

$$c = a \cdot \cos(\beta) + b \cdot \cos(\alpha)$$



Nach Seiten lassen:

$$a = \sin(\alpha) \cdot c = b = \sin(\beta) \cdot c \quad c = a / \sin(\alpha)$$

$$a = \cos(\beta) \cdot c = b = \cos(\alpha) \cdot c \quad c = b / \sin(\beta)$$

$$a = \tan(\alpha) \cdot b \quad b = \tan(\beta) \cdot a \quad c = b / \cos(\alpha)$$

$$a = b / \tan(\beta) \quad b = a / \tan(\alpha) \quad c = a / \cos(\beta)$$

