Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3: Stochastik

Sommersemester 2023

Universität Bremen

Institut für Statistik

Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
MZH, Raum 7250
E-Mail: dickhaus@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-63651

Blatt 1

Abgabe bis Dienstag, 02. Mai 2023, 23:59 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

Aufgaben

1. **Modellbildung.**
   Geben Sie (jeweils) den Ergebnisraum Ω an, der zu den folgenden Experimenten gehört. Ermitteln Sie zusätzlich jeweils, ob Ω diskret (also höchstens abzählbar) ist oder nicht.

   a) Die Federation of International Robot-soccer Association (FIRA) trägt Weltmeisterschaften in verschiedenen Roboterfußball-Spielklassen aus. Wir betrachten hier die Spielklasse „MiroSot Middle League“, in der ein Team aus genau fünf Robotern besteht. Angenommen, in einem bestimmten WM-Turnier verfolgen wir alle sieben Spiele des Teams „B-Human“ der Universität Bremen und führen eine Strichliste, wie viele Tore jeder der fünf Roboter jeweils pro Spiel erzielt.

   b) In der sogenannten „Survival Analysis“ (Überlebenszeitanalyse) interessiert man sich für die Zeitspanne bis zum ersten Eintritt eines Zielereignisses (Ausfall eines technischen Bauteils, Erkrankung einer Bakterienkultur, etc.). Wir lassen $n \geq 1$ zufällig aus ein und derselben großen Fertigungslinie ausgewählte Licht emittierende Dioden (LEDs) unabhängig voneinander im Dauerbetrieb leuchten, und notieren die jeweiligen Zeitspannen bis zum Ausfall.

   c) Es soll die Funktionstüchtigkeit von Laptops eines bestimmten Fabrikats von der Außentemperatur untersucht werden. Dazu werden von 50 solcher Laptops zufällig 25 Stück ausgewählt und in einem Kühlhaus betrieben. Die verbleibenden 25 Laptops werden bei normaler Raumtemperatur von ca. 18° Celsius betrieben. Wir notieren für jeden der 50 Laptops seine Funktionstüchtigkeit auf einer ganzzahligen Skala von 1 bis 5. Alle anderen Einflüsse (außer der Außentemperatur) auf die Funktionstüchtigkeit seien bei dieser Studie nicht von Interesse.

2. **Einfacher Würfelwurf.**
   Wir betrachten noch einmal das Beispiel des einfachen Würfelwurfs mit dem zugehörigen Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω dar.

   a) Das Ereignis A, gegeben durch $A =$ „Das Ergebnis ist eine Zweierpotenz.“.

   b) Das Ereignis B, gegeben durch $B =$ „Das Ergebnis ist eine natürliche Zahl.“.

   c) Das Ereignis C, gegeben durch $C =$ „Das Ergebnis ist (ohne Rest) durch 7 teilbar.“.

3. **Potenzmenge.**
   Sei $\Omega = \{1, \ldots, m\}$ für eine gegebene natürliche Zahl $m \geq 1$.

   a) Zeigen Sie, dass man jede Teilmenge A von Ω durch einen Binärstring der Länge m (also eine Abfolge von m Bits) kodieren kann.

   b) Zeigen Sie: Wenn man mit der Menge A in Aufgabenteil a) über alle Elemente der Potenzmenge von Ω iteriert, so iteriert man mit den jeweils zugehörigen Kodierungen über alle möglichen Binärstrings der Länge m.

4. **Multiple Select-Aufgabe.**
   Betrachten Sie die folgenden Aussagen über Mengen und Mengensysteme.

   a) Sei Ω eine endliche Menge der Kardinalität 6. Dann besitzt jede Menge von Teilmengen von Ω höchstens 64 Elemente.

   b) Jedes kompakte Intervall der Form $[a, b]$ für reelle Zahlen a und b mit $a < b$ ist überabzählbar.

   c) Sei Ω eine endliche Menge und $\mathcal{A}$ ein Mengensystem über Ω. Dann ist $\mathcal{A}$ genau dann abgeschlossen gegenüber abzählbarer Vereinigungsbildung, wenn es gegenüber endlicher Vereinigungsbildung abgeschlossen ist.

   d) Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{A}$ ein Mengensystem über Ω. Dann ist $\mathcal{A}$ genau dann abgeschlossen gegenüber abzählbarer Vereinigungsbildung, wenn es gegenüber endlicher Vereinigungsbildung abgeschlossen ist.

   Ermitteln Sie die richtige Kombination korrekter Aussagen.

   Hinweise:

   Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.