Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3: Stochastik

Sommersemester 2023

Universität Bremen

Institut für Statistik

Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
MZH, Raum 7250
E-Mail: dickhaus@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-63651

Blatt 2

Abgabe bis Dienstag, 09. Mai 2023, 23:59 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

Aufgaben

5. **Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung.**
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, C \in \mathcal{A}$ drei Ereignisse, so dass gilt:

$\mathbb{P}(C) = 0{,}4$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\complement A \cap B) = 0{,}3$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\complement A \cap C) = 0{,}15$
$\mathbb{P}(\complement A \cap B \cap \complement C) = 0{,}2$ $\qquad$ $\mathbb{P}(A \cap \complement B) = 0{,}25$ $\qquad$ $\mathbb{P}(A \cap \complement C) = 0{,}25$
$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}1$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden vier Ereignisse.

a) Mindestens eines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein.
b) Genau zwei der drei Ereignisse (A, B, C) treten ein.
c) Keines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein.
d) Höchstens eines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein.

6. **Kombinatorik.**
Angenommen, neun Studierende sollen auf drei Übungsgruppen verteilt werden.

a) Auf wieviele Arten geht das, wenn gefordert wird, dass in jede Gruppe genau drei Studierende kommen?
b) Auf wieviele Arten geht das, wenn gefordert wird, dass in jede Gruppe mindestens zwei und höchstens vier Studierende kommen?
c) Auf wieviele Arten geht das, wenn gefordert wird, dass in jede Gruppe mindestens ein(e) Studierende(r) kommt?

7. **Bedingte Wahrscheinlichkeiten.**
Angenommen, es ist bekannt, dass (genau) 0,1% der Bevölkerung eines bestimmten Landes eine gewisse Krankheit hat. Fernerhin angenommen, es existiert ein diagnostisches Verfahren für diese Krankheit mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- Falls eine (zufällig ausgewählte) Person die Krankheit tatsächlich hat, so zeigt das diagnostische Verfahren dies mit 99,9%-iger Wahrscheinlichkeit an.

- Falls eine (zufällig ausgewählte) Person die Krankheit tatsächlich nicht hat, so liefert das diagnostische Verfahren trotzdem mit 0,2%-iger Wahrscheinlichkeit einen positiven Befund (zeigt also fälschlicherweise an, die Krankheit sei vorhanden).

Angenommen, bei einer zufällig ausgewählten Person liefert das diagnostische Verfahren einen positiven Befund (zeigt also „krank“ an). Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich die Krankheit hat?

8. **Multiple Select-Aufgabe.**
Betrachten Sie die folgenden Aussagen über Wahrscheinlichkeitsräume.

a) Es gibt keinen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$, so dass für $A, B \subset \Omega$ gilt: $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 2/3$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse, so dass $\mathbb{P}(B) > 0$ ist. Dann gilt stets, dass $\mathbb{P}(A|B) \geq \mathbb{P}(A)$ ist.

c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse, so dass $\mathbb{P}(B) > 0$ ist. Dann gilt stets, dass $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$ ist.

d) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse, so dass $A \cap B \neq \emptyset$ ist. Dann ist es ausgeschlossen, dass $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ ist.

Ermitteln Sie die richtige Kombination korrekter Aussagen.

<u>Hinweise:</u>
Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.