Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3: Stochastik

Sommersemester 2025

Universität Bremen

Institut für Statistik

Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
MZH, Raum 7250
E-Mail: dickhaus@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-63651

Blatt 2

Abgabe bis Dienstag, 06. Mai 2025, 23:59 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

Aufgaben

5. **Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung.**
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, C \in \mathcal{A}$ drei Ereignisse, so dass gilt:

$\mathbb{P}(C) = 0{,}4$ $\quad$ $\mathbb{P}\left(\complement A \cap B\right) = 0{,}3$ $\quad$ $\mathbb{P}\left(\complement A \cap C\right) = 0{,}15$
$\mathbb{P}\left(\complement A \cap B \cap \complement C\right) = 0{,}2$ $\quad$ $\mathbb{P}\left(A \cap \complement B\right) = 0{,}25$ $\quad$ $\mathbb{P}\left(A \cap \complement C\right) = 0{,}25$
$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}1$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden vier Ereignisse.

a) Mindestens eines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein.
b) Genau zwei der drei Ereignisse (A, B, C) treten ein.
c) Keines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein.
d) Höchstens eines der drei Ereignisse (A, B, C) tritt ein.

6. **Konstruktion diskreter Wahrscheinlichkeitsmaße.**
Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest vorgegebene natürliche Zahl. Wir definieren die Zahlen

$$p_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \quad \text{für} \quad k \in \{0, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen richtig sind.

(i) Die Zahl $p_k^{(n)}$ ist für jedes $k \in \{0, \ldots, n\}$ nicht-negativ.
(ii) Die Summe $\sum_{k=0}^{n} p_k^{(n)}$ ist gleich Eins.

7. **Programmieraufgabe.**
Simulieren Sie in `R` mit Hilfe der Funktion `sample` den doppelten Würfelwurf mit unabhängig voneinander geworfenen Würfeln. Machen Sie insgesamt 500.000 Simulationsdurchläufe und zeichnen Sie ein Stabdiagramm der 500.000 “beobachteten” (d. h., simulierten) Augensummen.

8. **Multiple Select-Aufgabe.**
Betrachten Sie die folgenden Aussagen über Wahrscheinlichkeitsräume.

a) Es gibt keinen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$, so dass für $A, B \subset \Omega$ gilt: $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 2/3$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse, so dass $\mathbb{P}(B) > 0$ ist. Dann gilt stets, dass $\mathbb{P}(A|B) \geq \mathbb{P}(A)$ ist.

c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse, so dass $\mathbb{P}(B) > 0$ ist. Dann gilt stets, dass $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$ ist.

d) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$ zwei Ereignisse, so dass $A \cap B \neq \emptyset$ ist. Dann ist es ausgeschlossen, dass $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ ist.

Ermitteln Sie die richtige Kombination korrekter Aussagen.

Hinweise:

Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.