Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3: Stochastik

Sommersemester 2025

Universität Bremen

Institut für Statistik

Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
MZH, Raum 7250
E-Mail: dickhaus@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-63651

Blatt 3

Abgabe bis Dienstag, 13. Mai 2025, 23:59 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

Aufgaben

9. **Urnenmodell.**
Angenommen, in einer Urne liegen genau r rote und genau s schwarze Kugeln, wobei $r \geq 1$ und $s \geq 1$ fest vorgegebene natürliche Zahlen sind. Nun wird rein zufällig eine Kugel aus der Urne gezogen und **nicht** wieder in die Urne zurück gelegt. Hernach wird von den in der Urne verbliebenen Kugeln eine weitere Kugel rein zufällig gezogen.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden beiden Ereignisse.

   a) Beide gezogenen Kugeln sind rot.

   b) Die erste gezogene Kugel ist rot und die zweite gezogene Kugel ist schwarz.

   Hinweis:
   Die beiden Ziehungen geschehen unabhängig voneinander. (Zum Beispiel wird nach dem Ziehen der ersten Kugel die Urne zunächst wieder gut durchmischt, bevor die zweite Kugel gezogen wird.)

10. **Formel von Bayes.**
Angenommen, auf einer Ausstellung sind von zwölf Gemälden genau zehn Originale und genau zwei Fälschungen. Fernerhin angenommen, ein Besucher wählt rein zufällig ein Bild aus, befragt aber, bevor er es kauft, einen Experten nach dessen Meinung. Dieser Experte gibt mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit eine richtige Beurteilung des Bildes ab, und zwar unabhängig davon, ob das vorgelegte Bild ein Original oder eine Fälschung ist.

    Wenn der Experte entscheidet, dass das Bild eine Fälschung sei, gibt der Besucher das Bild zurück und wählt ein anderes. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses andere Bild dann ein Original?

11. **Totale Wahrscheinlichkeit.**
Angenommen, es gibt in einem bestimmten Lagerraum genau drei Kartons mit Transistoren. Im ersten Karton liegen genau zwölf Transistoren, von denen genau fünf defekt sind. Im zweiten Karton liegen genau acht Transistoren, von denen genau drei defekt sind. Im dritten Karton liegen genau neun Transistoren, von denen genau zwei defekt sind.

    Angenommen, es wird nun zunächst rein zufällig einer der drei Kartons ausgewählt und hernach rein zufällig ein Transistor aus dem gewählten Karton genommen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass dieser herausgenommene Transistor defekt ist?

12. **Multiple Select-Aufgabe.**
Gegeben seien zwei Ereignisse A und B bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dabei gelte, dass $\mathbb{P}(A) = 1/4$, $\mathbb{P}(B|A) = 1/2$ und $\mathbb{P}(A|B) = 1/4$ ist. Betrachten Sie unter diesen Gegebenheiten die folgenden Aussagen.

a) Die Ereignisse A und B sind disjunkt (haben also keine Elemente aus Ω gemeinsam).

b) Das Ereignis A ist eine Teilmenge des Ereignisses B.

c) $\mathbb{P}\left(\complement A \mid \complement B\right) = 3/4$.

d) $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}\left(A \mid \complement B\right) = 1$.

Ermitteln Sie die richtige Kombination korrekter Aussagen.

Hinweise:

Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.