Übungen zur Vorlesung

# Mathematik 3: Stochastik

Sommersemester 2025

Universität Bremen

Institut für Statistik

Prof. Dr. Thorsten Dickhaus
MZH, Raum 7250
E-Mail: dickhaus@uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-63651

## Blatt 7

Abgabe bis Dienstag, 10. Juni 2025, 23:59 Uhr
Jede komplett richtig gelöste Aufgabe ergibt 4 Punkte.

## Aufgaben

25. **Gauß'sche Normalverteilung.**
Viele Universitäten führen Aufnahmeprüfungen durch, um Studienplätze zu vergeben. Angenommen, die (zufällige) Punktzahl, die in einer solchen Aufnahmeprüfung erzielt wird, lässt sich (in einer gegebenen Zielpopulation) gut durch eine Normalverteilung mit Parametern $\mu = 527$ und $\sigma^2 = 12544$ modellieren.

   a) Berechnen Sie unter dieser Verteilungsannahme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Punktzahl von mehr als 500 erzielt wird.

   b) Wie viele Punkte müssen unter der angegebenen Verteilungsannahme mindestens erzielt werden, damit man unter den (vom Modell her erwarteten) 5% höchsten Punktzahlen landet?

26. **Exponentialverteilung.**
Angenommen, in einer gegebenen Population von Flugreisenden ist die (zufällige) Zeitspanne zwischen dem Kauf des Flugtickets und dem Abflug exponentialverteilt. Zusätzlich sei bekannt, dass diese Zeitspanne in der betrachteten Population im Mittel genau 15 Tage beträgt.

    Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem bzw. einer zufällig aus der betrachteten Population ausgewählten Flugreisenden die Zeitspanne zwischen dem Kauf des Flugtickets und dem Abflug weniger als zehn Tage beträgt.

27. **Berechnung von Erwartungswerten.**
Im Rahmen eines Charity-Events findet die folgende Aktion statt. Ein(e) Prominente(r) wirft eine faire Münze so lange, bis das erste Mal „Kopf" fällt. Falls dies beim $n$-ten Wurf geschieht, so spendet der/die Prominente $2^n$ Euro an eine wohltätige Organisation und die Aktion ist beendet.

   a) Es bezeichne $X$ die (zufällige) Spieldauer (diskret gemessen in der Anzahl an stattfindenden Münzwürfen). Berechnen Sie die Verteilung von $X$.

      Hinweis: Die Würfe können als unabhängig voneinander angenommen werden.

   b) Es bezeichne $Y$ die zu Stande kommende (zufällige) Spende (in Euro). Stellen Sie $Y$ als eine Transformation von $X$ dar; d. h., finden Sie eine Funktion $g$, so dass $Y = g(X)$ gilt.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von $X$.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert von $Y$.

28. **Multiple Select-Aufgabe.**
Es sei $X$ eine reellwertige Zufallsvariable, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert ist. Betrachten Sie unter diesen Voraussetzungen die folgenden Aussagen.

a) Falls $X$ eine Lebesguedichte besitzt und diese Lebesguedichte unbeschränkt ist, so ist es ausgeschlossen, dass der Erwartungswert von $X$ (in $\mathbb{R}$) existiert.

b) Falls $X$ nur endlich viele Werte annehmen kann und $\mathbb{E}[X] = 0$ gilt, so sind genau die Hälfte der Werte, die $X$ annehmen kann, positiv.

c) Falls $X$ eine Lebesguedichte besitzt und diese Lebesguedichte achsensymmetrisch (zur Null-Achse) ist, so gilt $\mathbb{E}[X] = 0$.

d) Falls $X$ diskret verteilt ist und $\mathbb{E}[X] = 0$ gilt, so gilt auch $\mathbb{E}[2X] = 0$.

Ermitteln Sie die richtige Kombination korrekter Aussagen.

Hinweise:

Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.