Probeklausur

zur Lehrveranstaltung „Mathematik 3“

Sommersemester 2022

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Datum: 15. Juli 2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	**Note**
Max. Punkte	20	25	25	20	10	100	—
Erreichte Punkte							

Aufgabe 1 (maximal 20 Punkte):

Ein Stab der Länge 1 (in einer beliebigen Längeneinheit gemessen) wird an einer zufälligen Stelle in zwei Stücke zerbrochen.

(a) Angenommen, die Bruchstelle ist gleichverteilt. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das größere Stück mehr als doppelt so lang ist wie das kleinere Stück?

(b) Konstruieren Sie eine Verteilung für die zufällige Bruchstelle, so dass die Wahrscheinlichkeit für das in Teil (a) betrachtete Ereignis gleich $5/8$ ist.

Aufgabe 2 (maximal 25 Punkte):

Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit der Lebesguedichte f_X, gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Ferner sei bekannt, dass der Erwartungswert von X gleich $2/3$ ist.

(a) Bestimmen Sie die reellen Konstanten a und b.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\exp(X)$.

Aufgabe 3 (maximal 25 Punkte):

Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Verteilung der (zufälligen) Betriebsdauer Y bis zum Ausfall (in 1000 Stunden) eines bestimmten technischen Bauteils durch die Lebesguedichte $p(\cdot, \theta)$, gegeben durch

$$p(y, \theta) = 2\theta y \exp(-\theta y^2)$$

für $y \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie für einen unbekannten Parameter $\theta > 0$, beschrieben werden kann. Angenommen, $n \in \mathbb{N}$ solcher Bauteile werden unabhängig voneinander betrieben und die jeweiligen Betriebsdauern bis zum Ausfall (in 1000 Stunden) gemessen.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ basierend auf einer Zufallstichprobe vom Unfang n aus stochastisch unabhängigen und identisch nach $p(\cdot, \theta)$ verteilten Beobachtungseinheiten.

(b) Bestimmen Sie den Momentenschätzer für θ basierend auf einer Zufallstichprobe vom Unfang n aus stochastisch unabhängigen und identisch nach $p(\cdot, \theta)$ verteilten Beobachtungseinheiten unter Verwendung der Momentenfunktion g, die gegeben ist durch $g(y) = y$.

Hinweis:

Für jede positive reelle Zahl σ gilt

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

Aufgabe 4 (maximal 20 Punkte):

Im Jahre 2000 waren die Zeitungsabonnements in Entenhausen wie folgt verteilt (es werde vereinfachend angenommen, dass jede(r) Einwohner:in Entenhausens höchstens eine Zeitung abonniert):

Tägliche Ente	14%
Fliegende Feder	17%
Zeitungsente	20%
Morgenschnabel	5%
Entenkurier	25%
kein Abonnement	19%

In einer Marktumfrage von 2010 wurden 100 zufällig ausgewählte Einwohner:innen Entenhausens unabhängig voneinander nach ihrem Abonnement gefragt. Es ergaben sich die folgenden absoluten Häufigkeiten:

Tägliche Ente	18
Fliegende Feder	13
Zeitungsente	22
Morgenschnabel	2
Entenkurier	16
kein Abonnement	29

Angenommen, es soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ mit Hilfe eines χ^2-Tests auf Anpassung die Nullhypothese geprüft werden, dass die Abonnementverteilung in Entenhausen im Jahre 2010 gleich der im Jahre 2000 war.

Dazu wurde das folgende `R`-Programm erstellt.

```
PearsonQ <- function(O, E)
{
 return(sum((O-E)^2 / E));
}

my_O <- c(18,13,22,2,16,29);
my_E <- c(14,17,20,5,25,19);

PearsonQ(my_O, my_E);
```

Dieses Programm lieferte als Ausgabe den numerischen Zahlenwert 12.587.

Fällen Sie die Testentscheidung unter Verwendung der folgenden Quantilstabelle.

Quantilstabelle (auf zwei Nachkommastellen gerundet):

	γ-Quantile (γ fettgedruckt)					
Verteilung	**0.025**	**0.05**	**0.1**	**0.9**	**0.95**	**0.975**
χ^2_5	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83
χ^2_6	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45
$F_{5,6}$	0.14	0.20	0.29	3.11	4.39	5.99

Aufgabe 5 (maximal 10 Punkte):

Ermitteln Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten (ein kurzer Satz pro Antwort genügt).

(i) Für jedes vorgegebene Wertepaar (n, k) mit $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$ ist die Anzahl möglicher k-Permutationen von n Objekten ohne Wiederholung stets nicht kleiner als die Anzahl möglicher k-Kombinationen von n Objekten ohne Wiederholung.

(ii) Der Wertebereich einer jeden Lebesguedichte ist eine Teilmenge von $[0, 1]$.

(iii) Die Varianz einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariable kann die Varianz einer auf $\mathbb{R}$ standardnormalverteilten Zufallsvariable niemals überschreiten.

(iv) Es sei θ ein gegebener statistischer Parameter, so dass der zugehörige Parameterraum eine (nicht notwendigerweise echte) Teilmenge der reellen Zahlen ist. Dann bildet die Menge aller derjenigen Zahlen θ_0, für die ein gewisser Hypothesentest die Nullhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ zu einer Typ I-Fehlerwahrscheinlichkeit von genau gleich $\alpha \in (0, 1)$ nicht verwirft, einen $(1-\alpha)\cdot 100\%$ Konfidenzbereich für θ.

(v) Das Produkt aus Typ I- und Typ II-Fehlerwahrscheinlichkeit eines statistischen Tests kann die Varianz einer auf $\mathbb{R}$ standardnormalverteilten Zufallsvariable niemals überschreiten.

<u>Hinweise:</u>

Das korrekte Ermitteln des Wahrheitsgehaltes der Aussagen ergibt jeweils einen Punkt, eine sinnvolle Begründung ergibt jeweils einen weiteren Punkt. Um Raten nicht zu belohnen, werden nur begründete Antworten gewertet.