Universität Bremen

Dr. Tim Haga

Mathematik 1
WS 2022/23

Übungsblatt 6

Präsenzübungen

P1. Nutzen Sie den *erweiterten* euklidischen Algorithmus, um Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ zu finden, welche die Gleichung $34a + 89b = 1$ lösen.

P2. Zeigen Sie: Unter neun beliebigen natürlichen Zahlen gibt es stets zwei Zahlen a, b, so dass gilt: $8 \mid (a - b)$.

P3. Bestimmen Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen $1 \leq n \leq 100$, welche durch 2 oder 3 teilbar sind.

P4. Zeigen Sie: Sind a, b reelle Zahlen, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Verständnisfragen

Diese Aufgaben dienen ihrer Selbstkontrolle.

*1. Was ist ein Binomialkoeffizient?

*2. Was besagt der binomische Lehrsatz?

*3. Was ist die Fakultät einer natürlichen Zahl?

*4. Was besagt das Schubfachprinzip?

5. Warum funktioniert das Schubfachprinzip bei unendlichen Mengen (nicht)?

6. Wie viele injektive Abbildungen gibt es von einer zehnelementigen Menge in eine zwölfelementige Menge?

*7. Was besagt das Prinzip von Inklusion-Exklusion?

8. Wieviele natürliche Zahlen $1 \leq n \leq 100$ lassen sich nicht durch 2, 3 oder 8 teilen?

9. Gilt das Prinzip von Inklusion-Exklusion auch für unendliche Mengen? Begründung?

10. Zeigen Sie, dass für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

P1. Nutzen Sie den *erweiterten* euklidischen Algorithmus, um Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ zu finden, welche die Gleichung $34a + 89b = 1$ lösen.

i	x	y	q	a	b
0	34	89	0	-34	13
1	89	34	2	13	-34
2	34	21	1	-8	13
3	21	13	1	5	-8
4	13	8	1	-3	5
5	8	5	1	2	-3
6	5	3	1	-1	2
7	3	2	1	1	-1
8	2	1	2	0	1
9	1	0		1	0

$\Rightarrow \quad -34 \cdot 34 + 13 \cdot 89 = 1$

$a_0 = a$, $b_0 = b$, $q_0 = a \operatorname{div} b$.

Und für $i \geq 1$: $a_i = b_{i-1}$, $b_i = a_{i-1} \bmod b_{i-1}$, $q_i = a_i \operatorname{div} b_i$

Und dann rückwärts (Sei k der Index der letzten Zeile):

$x_k = 1$, $y_k = 0$.

$x_i = y_{i+1}$, $y_i = x_{i+1} - q_i \cdot y_{i+1}$ (siehe Satz 5.24)

P2. Zeigen Sie: Unter neun beliebigen natürlichen Zahlen gibt es stets zwei Zahlen a, b, so dass gilt: $8 \mid (a - b)$.

$\Rightarrow$ Schubfachprinzip : Einteilung nach Rest bei Division durch 8

↳ 8 Fächer und 9 Zahlen

↳ es gibt Zahl r, sodass: $a \bmod 8 = r$, $b \bmod 8 = r$

↳ $(a-b) \bmod 8 = 0$

P3. Bestimmen Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen $1 \leq n \leq 100$, welche durch 2 oder 3 teilbar sind.

$\Rightarrow$ Prinzip Inklusion-Exklusion (Kap. 6.2)

durch 2 teilbar : 50

3 : 33

$2 \wedge 3$ (6) : 16

$50 + 33 - 16 = 67$

P4. Zeigen Sie: Sind a, b reelle Zahlen, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

<u>IA:</u> $n=0$ $\qquad (a+b)^0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

<u>IV:</u> $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ wird als wahr angenommen

<u>IS:</u> $n \to n+1$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a+b)^n$$

$$\overset{IV}{=} (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= a \cdot \sum + b \cdot \sum$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}}_{\mathrm{II}}$$

I $\qquad \binom{n}{0} ab^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^3 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^n b^1 + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0$

II $\qquad \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{1} a b^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^2 + \binom{n}{n} a^n b^1$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{k\;(n+1)!}{k!(n+1-k)!\cdot(n+1)} + \frac{(n+1-k)\cdot(n+1)!}{k!(n+1-k)!\,(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\cdot\frac{k}{n+1} + \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\,\frac{(n+1-k)}{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{k}\cdot\frac{k}{n+1} + \binom{n+1}{k}\,\frac{n+1-k}{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{k}\cdot\underbrace{\left(\frac{k+n+1-k}{n+1}\right)}_{=1}$$

$$= \binom{n}{n}a^{n+1} + \binom{n}{0}b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{n}a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} \qquad \Big|\ \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

$$= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} + -\|-$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} \qquad \square$$