Universität Bremen

Prof. Dr. Anastasios Stefanou
Sommersemester 2023

Mathe 2
Blatt P10 Musterlösung

Gruppe: Mathe 2 Tutor:innen

Präsenzübungen

P1 Bestimmen Sie die ersten fünf Ableitungen von $\cos(x)$ und $\sin(x)$.

Ableitung	$\cos(x)$	$\sin(x)$
1.	$-\sin(x)$	$\cos(x)$
2.	$-\cos(x)$	$-\sin(x)$
3.	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
4.	$\cos(x)$	$\sin(x)$
5.	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

P2 Bestimmen Sie die ersten fünf Ableitungen von $\cos(x^2+2x)$ und $\sin(x^2-2x)$.

Es wird die Kettenregel benötigt: $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$,
sowie die Produktregel: $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Ableitung	$\cos(x(x+2))$
1.	$-2(x+1)\sin(x(x+2))$
2.	$-2\sin(x(x+2)) - 4(x+1)^2\cos(x(x+2))$
3.	$8(x+1)^3\sin(x(x+2)) - 12(x+1)\cos(x(x+2))$
4.	$48(x+1)^2\sin(x(x+2)) + 16(x+1)^4\cos(x(x+2)) - 12\cos(x(x+2))$
5.	$8(x+1)(-4(x+1)^4\sin(x(x+2)) + 15\sin(x(x+2)) + 20(x+1)^2\cos(x(x+2)))$

Tabelle 1: Ableitungen von $\cos(x^2+2x) = \cos(x(x+2))$

Ableitung	$\sin(x(x-2))$
1.	$2(x-1)\cos(x(x-2))$
2.	$2\cos(x(x-2)) - 4(x-1)^2\sin(x(x-2))$
3.	$-8(x-1)^3\cos(x(x-2)) - 12(x-1)\sin(x(x-2))$
4.	$-48(x-1)^2\cos(x(x-2)) + 16(x-1)^4\sin(x(x-2)) - 12\sin(x(x-2))$
5.	$8(x-1)(20(x-1)^2\sin((x-2)x) + 4(x-1)^4\cos((x-2)x) - 15\cos((x-2)x))$

Tabelle 2: Ableitungen von $\sin(x^2-2x) = \sin(x(x-2))$

P3 Nutzen Sie das Newton-Verfahren, um eine Nullstelle der Funktion $x^3 - 2x + 1$ zu finden. Nehmen Sie als Startwert $x_0 = -1$ und stoppen Sie das Verfahren, wenn sich an der vierten Nachkommastelle nichts mehr ändert.

Das Newton Verfahre basiert auf folgender Gleichung: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Daher benötigen wir:
$x_0 = -1$
$f(x) = x^3 - 2x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 2$
Außerdem soll auf die vierte Nachkommastelle genau gerechnet werden. Daher sollten mindestens 5 Stellen verwendet werden!

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	-1	2	1
1	-3	-20	25
2	-2.2	-5.248	12.52
3	-1.78083	-1.085984995	7.514066467
4	-1.6363	-0.1085567441	6.03243307
5	-1.6183	-0.001557600487	5.85668467
6	-1.61803	0.00002335047138	5.854063243
7	-1.61803	0.00002335047138	

Tabelle 3: Caption

P4 Entwickeln Sie $\sin(x)$ in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

Das Taylorpolynom ist gegeben durch $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, wir bilden aber die Taylorreihe, in dieser wird das n weggelassen und durch ein ∞ ersetzt:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Wir brauchen daher die ersten 4 Ableitungen von sin (da sich diese Wiederholen).

k	$\sin^{(k)}(x)$	$\sin^{(k)}(\pi)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	-1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	1

$$\begin{aligned}
T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} & \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
= \sum_{j=0}^{\infty} & \left(\frac{f^{(4j)}(x_0)}{(4j)!}(x-x_0)^{4j} + \frac{f^{(4j+1)}(x_0)}{(4j+1)!}(x-x_0)^{4j+1} + \right. \\
& \left. \frac{f^{(4j+2)}(x_0)}{(4j+2)!}(x-x_0)^{4j+2} + \frac{f^{(4j+3)}(x_0)}{(4j+3)!}(x-x_0)^{4j+3}\right) \\
= \sum_{j=0}^{\infty} & \left(\frac{0}{(4j)!}(x-x_0)^{4j} - \frac{1}{(4j+1)!}(x-x_0)^{4j+1} + \right. \\
& \left. \frac{0}{(4j+2)!}(x-x_0)^{4j+2} + \frac{1}{(4j+3)!}(x-x_0)^{4j+3}\right) \\
= \sum_{j=0}^{\infty} & \left(-\frac{(x-x_0)^{4j+1}}{(4j+1)!} + \frac{(x-x_0)^{4j+3}}{(4j+3)!}\right)
\end{aligned}$$