Universität Bremen

Prof. Dr. Anastasios Stefanou
Sommersemester 2023

Mathe 2
Blatt P6 Musterlösung

Gruppe: Mathe 2 Tutor:innen

- $\varepsilon - \delta$-Kriterium

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

1 Untersuchen Sie die Folgenden Reihen auf Stetigkeit

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1, & x \leq 2 \\ -x + 5, & x > 2 \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

In beiden Fällen wird die Funktion nur an einer Stelle auf Stetigkeit untersucht (für a) an $x_0 = 2$, für b) an $x_0 = 0$), da die Stetigkeit an allen anderen Stellen bereits aus Satz 6.9 (Polynome sind stetig) folgt.

a) Wir zeigen, dass die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist. Dazu brauchen wir zuerst, dass $\frac{1}{2}2^2 + 1 = 3 = -2 + 5$ ist. Wäre dies nicht der Fall wäre die Funktion in $x_0 = 2$ nicht stetig.

i) Per Grenzwert

Stetigkeit durch Grenzwert an der Stelle x_0 ist gegeben durch:

$$\forall (x_n) : \left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \right)$$

Für Folgen (x_n).
Wir müssen also für alle Folgen x_n mit dem Grenzwert 2 zeigen, dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.

Variante 1: Fallunterscheidung Dafür helfen uns die Regeln aus Satz 3.8 Sei also (x_n) eine Folge mit Grenzwert 2. Wir machen eine Fallunterscheidung, nach x:

- $x \leq 2$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x_n^2+1\right) && \mid \text{Def.} f \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x_n^2\right)+\left(\lim_{n\to\infty} 1\right) && \mid \text{Addition von Folgen} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} x_n^2\right)+1 && \left| \begin{array}{c}\text{Multiplikation von Folgen}\\ \text{Grenzwert konstanter Folge}\end{array}\right. \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n\right)+1 && \left| \begin{array}{c}\text{Grenzwert konstanter Folge}\\ \text{Multiplikation von Folgen}\end{array}\right. \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2+1 && \mid x_n \text{ hat Grenzwert } 2 \\
&= 1\cdot 2+1 = 2+1 = 3
\end{aligned}
$$

- $x > 2$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x) &= \lim_{n\to\infty}(-x+5) && \mid \text{Def.} f \\
&= \lim_{n\to\infty}(-x)+\left(\lim_{n\to\infty} 5\right) && \mid \text{Addition von Folgen} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} -1\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)+5 && \left| \begin{array}{c}\text{Multiplikation von Folgen}\\ \text{Grenzwert konstanter Folge}\end{array}\right. \\
&= -1\cdot 2+5 && \left| \begin{array}{c}\text{Grenzwert konstanter Folge}\\ x_n \text{ hat Grenzwert } 2\end{array}\right. \\
&= -2+5 = 3
\end{aligned}
$$

Variante 2: Über ε-Kriterium der Konvergenz In dieser Variante errechnen wir aus einem ε, dass angibt, wie nah $f(x_n)$ an $f(x_0)$ ist, ein ϵ' und ε'', dass uns angibt, wie nah dafür x_n an x_0 sein muss (jeweils ein pro Funktion). Aus diese ε' und ε'' können wir schlussendlich n_0' und n_0'' für die Konvergenz von $\frac{1}{2}x_n^2+1$ und $-x_n+5$ bestimmen. Wählen wir $n_0 = \max n_0', n_0''$, so folgt Konvergenz der zusammengesetzten Funktion.
Dies verläuft relativ analog zu dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium.

ii) Per $\varepsilon - \delta$-Kriterium

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

Wir betrachten nun einmal das δ_1 für Stetigkeit von $\frac{1}{2}x^2+1$ in $x_0 = 2$ und das δ_2 für Stetigkeit von $-x+5$ in $x_0 = 2$. Anschließend wählen wir das Minimum dieser Beiden.

- Für $-x+5$ ergibt sich $\delta_1 = \varepsilon$

$$
\begin{aligned}
|f(x_0) - f(x)| &= |-2+5-(-x+5)| \\
&= |-2+5+x-5| \\
&= |-2+x| \\
&= |2-x| \\
&< \delta_1 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

- Für $\frac{1}{2}x^2+1$ ergibt sich $\delta_2^2+4\delta_2=\varepsilon_2 \Rightarrow \delta_2=-2+\sqrt{4+2\varepsilon}$

$$\begin{aligned}
|f(x_0)-f(x)| &= |3-(\frac{1}{2}x^2+1)| \\
&= |3-\frac{1}{2}x^2-1| \\
&= \frac{2}{2}|2-\frac{1}{2}x^2| \\
&= \frac{1}{2}|4-x^2| \\
&= \frac{1}{2}|2-x|\cdot|2+x| \\
&< \frac{\delta_2}{2}|2+x| \\
&= \frac{\delta_2}{2}|-2-x| \\
&= \frac{\delta_2}{2}|-2+(-2+2)-x| \\
&= \frac{\delta_2}{2}|-4+(2-x)| \\
&< \frac{\delta_2}{2}|-4+\delta| \\
&\le \frac{\delta_2}{2}(|-4|+|\delta|) \\
&= \frac{\delta_2}{2}(4+\delta) \\
&= 2\delta_2+\frac{1}{2}\delta_2^2=\varepsilon
\end{aligned}$$

Durch die p-q-Formel lässt sich dann die Lösung mit $\delta_2>0$ von $\delta_2^2+4\delta_2-2\varepsilon=0$ bestimmen als $\delta_2=-2+\sqrt{4+2\varepsilon}$

Damit nehmen wir $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}=\min\{\varepsilon,-2+\sqrt{4+2\varepsilon}\}$

b) Wir zeigen, dass diese Funktion an der Stelle $x_0=0$ nicht stetig ist:

i) Per Grenzwert

Um Stetigkeit zu widerlegen, negieren wir die Stetigkeit durch Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
\neg\forall(x_n) &: \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)\right) \\
\exists(x_n) &: \neg\left(\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)\right)\right) \\
\exists(x_n) &: \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \wedge \neg\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)\right) \\
\exists(x_n) &: \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq f(x_0)\right)
\end{aligned}$$

Wählen wir nun $x_n=\frac{-1}{n}$.
$\frac{-1}{n}$ ist eine Nullfolge, da $\lim_{n\to\infty}\left((-1)\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}-1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=-1\cdot 0=0$.
Es bleibt also zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty}f(x_n)\neq f(x_0)$. Da alle für alle n filt $x_n=\frac{-1}{n}<0$, folgt mit der Definition von f, dass $f(x_n)=-1$. $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}-1=-1$. Jedoch $f(x_0)=f(0)=1$.
Damit ist die Nicht-Stetigkeit in $x_0=0$ bewiesen.

ii) Per $\varepsilon - \delta$-Kriterium

Wir das $\varepsilon - \delta$-Kriterium:

$$\begin{aligned}
&\neg\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x \in D : |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \\
&\exists\varepsilon > 0\neg\exists\delta > 0\forall x \in D : |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \\
&\exists\varepsilon > 0\forall\delta > 0\neg\forall x \in D : |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \\
&\exists\varepsilon > 0\forall\delta > 0\exists x \in D : \neg(|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon) \\
&\exists\varepsilon > 0\forall\delta > 0\exists x \in D : |x_0 - x| < \delta \wedge \neg|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \\
&\exists\varepsilon > 0\forall\delta > 0\exists x \in D : |x_0 - x| < \delta \wedge |f(x_0) - f(x)| \geq \varepsilon
\end{aligned}$$

Wir wählen also $\varepsilon = 1$ und $x = (x_0 - 0,9 \cdot \delta)$.
Setzen wir dies ein:

$$\begin{aligned}
&\forall\delta > 0 : |x_0 - (x_0 - 0,9 \cdot \delta)| < \delta \wedge |f(x_0) - f(x_0 - 0,9 \cdot \delta)| \geq 1 \\
&\forall\delta > 0 : |0,9 \cdot \delta| < \delta \wedge |f(x_0) - f(x_0 - 0,9 \cdot \delta)| \geq 1 && |\delta > 0, x_0 = 0 \\
&\forall\delta > 0 : (0,9 \cdot \delta < \delta) \wedge |f(0) - f(-0,9 \cdot \delta)| \geq 1 && |\top \wedge x \equiv x, \text{Def.} f(0) \\
&\forall\delta > 0 : |1 - f(-0,9 \cdot \delta)| \geq 1 && |\delta > 0 \Rightarrow -0.9\delta < 0, \text{Def. } f \\
&\forall\delta > 0 : |1 - (-1)| \geq 1 \\
&\forall\delta > 0 : |2| \geq 1
\end{aligned}$$

Diese Aussage ist offensichtlich wahr. Da dies die Negation der Stetigkeit an $x_0 = 0$ ist, ist die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ also nicht stetig.

2 Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) - x \end{aligned}$$

im Intervall $[0, \pi]$ (oder $[0°, 180°]$) eine Nullstelle hat.

$f(0) = \cos(0) - 0 = 1 - 0 = 1$, $f(\pi) = \cos(\pi) - \pi = -1 - \pi = -(\pi + 1)$. Da $f(0) > 0$ und $f(\pi) < 0$ und $\cos(x) - x$ stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz (Satz 6.11), dass es eine Nullstelle im Intervall $[0, \pi]$ geben muss.

3 Zeigen Sie mittels des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums, dass die reelle Funktion $f(x) = x^2$ stetig ist.

Zu zeigen:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D : |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

Also Stetigkeit in jedem x_0.

Zuerst versuchen wir die rechte Seite ($x_0^2 - x^2$) mit Hilfe der Linken ($|x_0 - x| < \delta$) abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
|x_0^2 - x^2| &= |(x_0 - x)(x_0 + x)| && \mid \text{3. Binom} \\
&= |x_0 - x| \cdot |x_0 + x| && \mid |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\
&< \delta \cdot |x_0 + x| && \mid |x_0 - x| < \delta \\
&= \delta \cdot |-1| \cdot |x_0 + x| && \mid \text{Nahrhafte 1} \\
&= \delta \cdot |-x_0 - x| && \mid |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\
&= \delta \cdot |-x_0(-x_0 + x_0) - x| && \mid \text{Nahrhafte 0} \\
&= \delta \cdot |(-x_0 - x_0) + (x_0 - x)| && \mid \text{Assoziativgesetz} \\
&\leq \delta \cdot (|-x_0 - x_0| + |x_0 - x|) && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\
&< \delta \cdot (|-2x_0| + \delta) && \mid |x_0 - x| < \delta \\
&= \delta^2 + 2\delta|x_0| && \mid \text{Distributivgesetz}
\end{aligned}$$

Nun wollen wir, dass $\delta^2 + 2\delta|x_0| = \varepsilon$ gilt. Wenn wir diese Gleichung dann nach δ umstellen, so haben wir eine Gleichung, mit der wir δ abhängig von x_0 und ε bestimmen können. Zum Umstellen kann die $p - q$-Formel verwendet werden, oder quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}
\delta^2 + 2\delta|x_0| &= \varepsilon && \mid \text{Nahrhafte 0} \\
\delta^2 + 2\delta|x_0| + |x_0|^2 - |x_0|^2 &= \varepsilon && \mid \text{Binomische Formel} \\
(\delta + |x_0|)^2 - |x_0|^2 &= \varepsilon && \mid +|x_0|^2 \\
(\delta + |x_0|)^2 &= \varepsilon + |x_0|^2 && \mid \sqrt{} \\
\delta + |x_0| &= \pm\sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} && \mid -|x_0| \\
\delta &= \pm\sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} - |x_0|
\end{aligned}$$

Wegen $\delta > 0$ muss $\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$ gelten.