

Musterlösung Klausur
Mathematik 3 SoSe 2022

zu Aufgabe 1:

Betrachte zur Modellierung des Experiments
den W'keitsraum $(\Omega, \mathcal{Z}^{\omega}, \mathbb{P})$ mit

$$\Omega = \{ (m_1, m_2, \dots, m_{10}) : m_j \in \begin{matrix} \text{niedrig,} \\ \text{mittel,} \\ \text{hoch} \end{matrix} \\ \forall 1 \leq j \leq 10 \}$$

und

$\mathbb{P} \triangleq$ diskrete Gleichverteilung auf Ω
(folgt aus der Fairness der
Würfel und der stoch. Unabhängigkeit)

Sei A das interessierende Zielereignis.

Dann ist
$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Nun ist $|A| = \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3}$

↑
wähle
drei
Positionen
für
"niedrig"

↑
wähle drei
Positionen
für
"mittel"

sowie $|B| = \text{Per}^*(3, 10) = 3^{10}$

$$\Rightarrow R(A) = \frac{\binom{10}{3} \binom{7}{3}}{3^{10}}$$

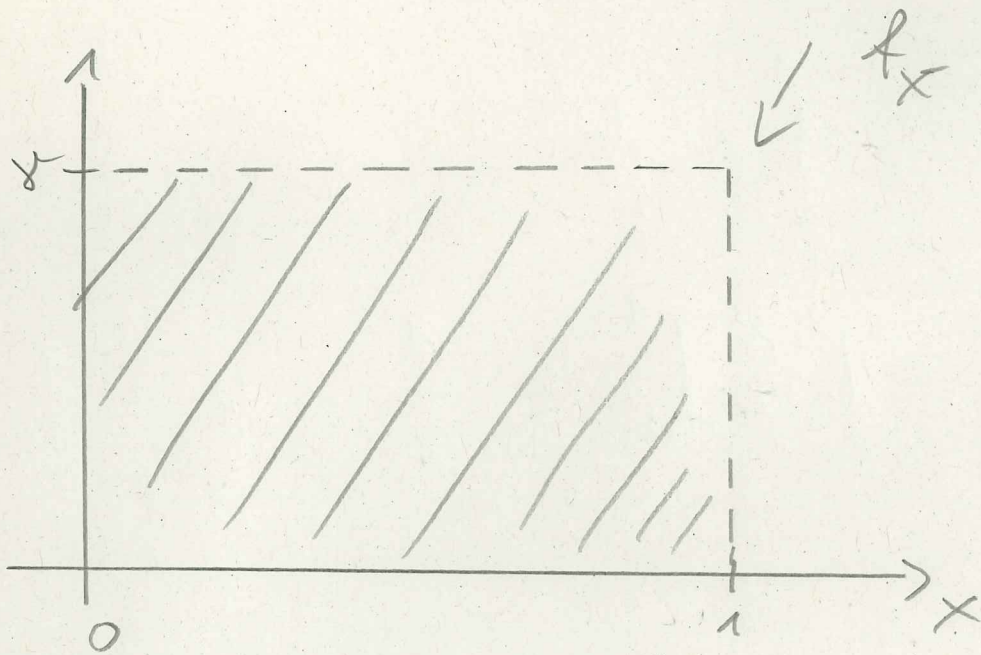
$$= \frac{1}{3^{10}} \left[\frac{10!}{3! 7!} \cdot \frac{7!}{3! 4!} \right]$$

$$= \frac{10!}{3! 3! 4!} \cdot \frac{1}{3^{10}}$$

(ab hier
volle Punktzahl)

$$\left(= \frac{4200}{59049} \right)$$

Zu Aufgabe 2:



(a) Wegen Normierung (schraffierte Fläche muss den Flächeninhalt 1 haben) muss gelten:

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \\ \text{Höhe} & \text{Breite} & \\ y \cdot (1-0) & \stackrel{!}{=} & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

$$(b) \quad \mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot f_X(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

(c)

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x) \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

Zu Aufgabe 3:

(a) Gemäß Hinweis

$$\text{ist } p_1(\theta) = 1 - p_2(\theta) - p_3(\theta)$$

$$\Rightarrow \theta = 1 - p_2(\theta) - p_3(\theta)$$

$p_j(\theta)$ kann gemäß plug-in geschätzt werden durch $\frac{N_j}{n}$ für $j=2,3$.

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 1 - \hat{p}_2(\theta) - \hat{p}_3(\theta)$$

$$= 1 - \frac{N_2}{n} - \frac{N_3}{n}.$$

(b) Sei $y_i \in \{1, 2, 3\}$ die Kategorie von Banane i in der Stichprobe, $1 \leq i \leq n$.

Sei ferner $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$

Gemeinsame Likelihoodfunktion:

$$L(\vec{y}, \theta) = \theta^{n_1} \cdot [\lambda(1-\theta)]^{n_2}$$

$$[(1-\lambda)(1-\theta)]^{n_3}$$

wobei $n_j = |\{1 \leq i \leq n : y_i = j\}|$
für $j = 1, 2, 3$

Gemeinsame Log-Likelihoodfunktion:

$$\begin{aligned} L(\vec{y}, \theta) &= n_1 \log(\theta) + n_2 \log(\lambda) \\ &\quad + n_2 \log(1-\theta) \\ &\quad + n_3 \log(1-\lambda) \\ &\quad + n_3 \log(1-\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= n_1 \log(\theta) + (n_2 + n_3) \log(1-\theta) \\ &\quad + n_2 \log(\lambda) + n_3 \log(1-\lambda) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L(\vec{y}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{n_1}{\theta} - \frac{n_2 + n_3}{1 - \theta}$$

$$\frac{\partial L(\vec{y}, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n_1}{\theta} = \frac{n_2 + n_3}{1 - \theta}$$

$$\Leftrightarrow n_1 - n_1 \theta = \theta n_2 + \theta n_3$$

$$\Leftrightarrow n_1 = n \theta \quad [n_1 + n_2 + n_3 \equiv n]$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{n_1}{n} = 1 - \frac{n_2}{n} - \frac{n_3}{n}$$

Also stimmt der ML-Schätzer mit dem MOM-Schätzer aus Teil (a) überein.

[Man überprüft leicht, dass

$$\frac{\partial^2 L(\vec{y}, \theta)}{\partial \theta^2} < 0 \quad \text{ist.}]$$

Zu Aufgabe 4:

(a) Es wird das Bernoulli'sche Versuchsschema mit bekanntem $n=20$ und unbekannter Trefferwahrscheinlichkeit θ betrachtet. Das Testproblem lautet:

$$H_0 : \theta = 1/2 \quad \text{versus}$$

$$H_1 : \theta \neq 1/2 \quad (\text{zweiseitiges Testproblem})$$

Die Testentscheidung erfolgt auf der Basis der beobachteten

Anzahl an Treffern i in

dem dargestellten Fall sind genau $y = 15$ Treffer beobachtet worden.

$$(b) \quad \phi(y) = 1 \Leftrightarrow p(y) < \alpha$$

$\uparrow$
p-Wert

Da hier $p(y) = 0,04139 > 0,01 = \alpha$ ist, wird H_0 nicht abgelehnt.

Zu Aufgabe 5:

(i) Richtig Es gilt nämlich, dass

$$X^k \equiv X \text{ ist für}$$

alle $k > 1$, denn

$$0^k = 0 \quad \text{und} \quad 1^k = 1.$$

Wenn zwei Zufallsvariablen
gleich sind, sind auch
ihre Erwartungswerte gleich.

Ferner ist $E[X] = P(X=1) \in [0,1]$,
existiert also in $\mathbb{R}$.

(ii) Falsch. f muss nur stückweise
stetig sein, kann also
an einer bestimmten
Stelle x_0 eine
Polstelle besitzen und
ist dort dann
unbeschränkt.

(iii) Richtig. In Analogie zu Aufgabe 2. (c) errechnet man leicht, dass $\text{Var}(\text{UNI}[a, b]) = \frac{(b-a)^2}{12}$ ist. Da $b-a > 0$ ist, wächst dieser Ausdruck in $b-a$.

Ohne Rechnung ist aber auch sofort klar, dass sich die Variabilität erhöht, wenn sich der Träger der Verteilung verbreitert (unter Gleichverteilung).

(iv) Richtig:

$$\hat{\theta}_{\text{MOM}}(\vec{Y}) = \hat{\theta}_{\text{MLE}}(\vec{Y}) = \frac{S}{n},$$

$$S = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T.$$

(v) Falsch, denn es wird gar keine Einschränkung an ϕ gemacht.