

Musterlösung zur Klausur
„Mathematik 3“ am 14.10.2022

zu Aufgabe 1:

$$(a) \quad \Omega = \{ (i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : 1 \leq i, j, k \leq 6 \},$$

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} \quad (\text{Potenzmenge von } \Omega),$$

$P \triangleq$ diskrete Gleichverteilung
auf $(\Omega, 2^{\Omega})$, d.h.:

$$\begin{aligned} \forall A \in 2^{\Omega} : P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|A|}{6 \cdot 6 \cdot 6} \\ &= \frac{|A|}{216}. \end{aligned}$$

$$(b) \quad A = \{ (1, 4, 6), (1, 6, 4), (1, 5, 5), \\ (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 5, 4), \\ (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 3, 5), \\ (3, 4, 4), (3, 5, 3), (3, 6, 2), \\ (4, 1, 6), (4, 2, 5), (4, 3, 4),$$

$(4, 4, 3), (4, 5, 2), (4, 6, 1), (5, 1, 5),$
 $(5, 2, 4), (5, 3, 3), (5, 4, 2), (5, 5, 1),$
 $(6, 1, 4), (6, 2, 3), (6, 3, 2), (6, 4, 1) \}$

$$\Rightarrow |A| = 27 \Rightarrow P(A) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

$\circ B = \{ (1, 5, 6), (1, 6, 5), (2, 5, 5), (2, 6, 4),$
 $(2, 4, 6), (3, 3, 6), (3, 4, 5), (3, 5, 4),$
 $(3, 6, 3), (4, 2, 6), (4, 3, 5), (4, 4, 4),$
 $(4, 5, 3), (4, 6, 2), (5, 1, 6), (5, 2, 5),$
 $(5, 3, 4), (5, 4, 3), (5, 5, 2), (5, 6, 1),$
 $(6, 1, 5), (6, 2, 4), (6, 3, 3), (6, 4, 2),$
 $(6, 5, 1) \}$

$$\Rightarrow |B| = 25 \Rightarrow P(B) = \frac{25}{216} \approx 0,116.$$

$c) \quad 11 = 1 + 4 + 6$
 $\quad \quad = 2 + 3 + 6$
 $\quad \quad = 3 + 4 + 4$
 $\quad \quad = 3 + 3 + 5$
 $\quad \quad = 1 + 5 + 5$
 $\quad \quad = 2 + 4 + 5$

$\left. \begin{array}{l} 6 \\ \text{Zerlegungen} \end{array} \right\}$

$$\begin{array}{l}
 12 = 1 + 5 + 6 \\
 = 2 + 5 + 5 \\
 = 2 + 4 + 6 \\
 = 3 + 3 + 6 \\
 = 3 + 4 + 5 \\
 = 4 + 4 + 4
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 12 = 1 + 5 + 6 \\ = 2 + 5 + 5 \\ = 2 + 4 + 6 \\ = 3 + 3 + 6 \\ = 3 + 4 + 5 \\ = 4 + 4 + 4 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{ebenfalls} \\ 6 \text{ Zerlegungen.} \end{array}$$

Der Denkfehler ist, dass nicht alle diese Zerlegungen gleich wahrscheinlich sind (unter der Annahme der Gleichverteilung auf Ω).

zu Aufgabe 2:

(a) Verwende Normierungsbedingung:

$$\int_1^{\infty} f_x(x) dx \stackrel{!}{=} 1$$

○ $\Leftrightarrow \gamma \cdot \int_1^{\infty} x^{-\gamma} dx = 1$

$$\Leftrightarrow \gamma \cdot \left[\frac{1}{1-\gamma} \cdot x^{1-\gamma} \right]_1^{\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma \left(0 - \frac{1}{1-\gamma} \right) = 1$$

○ $\uparrow$
 $\gamma > 1 \Rightarrow 1-\gamma < 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-\gamma} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \gamma = \gamma-1.$$

(b)

$$E[X] = \int_1^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

$$= \gamma \cdot \int_1^{\infty} x^{1-\gamma} dx$$

$$= \gamma \left[\frac{1}{2-\gamma} x^{2-\gamma} \right]_1^{\infty}$$

$$= \gamma \left(0 - \frac{1}{2-\gamma} \right)$$

↑
falls $\gamma > 2$ ist

$$= \frac{\gamma}{\gamma-2}$$

Für $\gamma=3$ und $\gamma=2$
ergibt sich folglich, dass

$$E[X] = 2 = \gamma \text{ ist.}$$

zu Aufgabe 3:

(a) Gemeinsame Likelihoodfunktion
der Gesamtstichprobe:

$$z(\vec{y}, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2y_i}{\theta} \exp\left(-\frac{y_i^2}{\theta}\right),$$

$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$. Umgeformt ist

$$z(\vec{y}, \theta) = \left(\frac{2}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^n y_i \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Gemeinsame Log-Likelihoodfunktion:

$$L(\vec{y}, \theta) = \log(z(\vec{y}, \theta))$$

$$= n \log(2) - n \log(\theta) + \sum_{i=1}^n \log(y_i) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

$$\frac{\partial L(\vec{y}, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\frac{\partial L(\vec{y}, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\circ \quad \Rightarrow \frac{n}{\theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\Rightarrow n = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{\theta}$$

$$\uparrow$$

$$\theta > 0$$

$$\circ \quad \Rightarrow \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\uparrow$$

$$\theta > 0$$

Da man leicht überprüft, dass
 (→ Nachtrag
 S. 14)

$$\frac{\partial^2 L(\vec{y}, \theta)}{\partial \theta^2}$$

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

negativ
 ist,

folgt, dass $\hat{\theta}_{ML}(\vec{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$ ist.

(b) Wählt man als Momentenfunktion $g(y) = y^2$, so ist

$$\hat{\theta}_{MOM}(\vec{y}) = \hat{\theta}_{ML}(\vec{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

○ (empirisches zweites Moment).

zu Aufgabe 4:

Sei X eine Zufallsvariable, die ^(genau) die Werte 1, 2, 3, 4, 5 und 6 annehmen kann. Zum Beispiel kann X also die zufällige Augenzahl beschreiben, die fällt, wenn man einen bestimmten Würfel wirft.

(a) Es wird die Nullhypothese H_0 : " X ist diskret gleichverteilt auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ " geprüft

gegen die Alternativhypothese

H_1 : " X ist nicht diskret
gleichverteilt auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$."

Dafür liegen $n = 60$ Wiederholungen

(also unabhängige Realisierungen von X)

○ vor. Die Anzahl, wie oft bei diesen 60 Versuchen die jeweiligen Realisierungsmöglichkeiten von X aufgetreten sind, stehen in dem Vektor "Häufigkeiten". Die

○ Teststatistik ist

$$T = \sum_{i=1}^6 \frac{(h_i - 10)^2}{10} = 11,6,$$

wobei h_i der i -te Eintrag im Vektor "Häufigkeiten" ist.

Die Nullhypothese wird abgelehnt zum Signifikanzniveau α , falls der zu

T gehörige p-Wert

$$p = 1 - F_{\chi^2_5}(T) \text{ kleiner als } \alpha \text{ ist.}$$

Dabei bezeichnet $F_{\chi^2_5}$ die

Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-

Verteilung mit 5 Freiheitsgraden.
(Prüfverteilung)

(b) Hier ist $p \approx 0,0407 < 0,05$
 $= \alpha,$

so dass H_0 zu Gunsten von

H_1 abgelehnt wird.

Zu Aufgabe 5:

(i) Richtig. Sei $p := P(X=1)$.

Dann ist $E[X] = p$ und

$\text{Var}(X) = p(1-p)$. Da $p \in [0, 1]$

ist, ist stets $\text{Var}(X) \leq E[X]$.

○ (ii) Falsch. Gegenbeispiel:

$$a=0, b=1,$$

$$f(x) = -\ln(x) \Rightarrow$$

$$E[X] = 1/4, \text{ obwohl } f \text{ auf}$$

$[0, 1]$ unbeschränkt ist.

○ (iii) Falsch.

Anzahl Permutationen ist $n!$,

Anzahl Auswahlen ist $\binom{n}{n/2}$.

Sei nun z.B. $n=4$, dann

$$\text{ist } 4! = 24 \text{ und}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

(iv) Angenommen, $X \sim \text{Bin}(\theta, p)$.

Dann ist $f_{\theta}(k) = \binom{\theta}{k} p^k (1-p)^{\theta-k}$

die zu X gehörige Likelihoodfunktion.

Da $\theta \in \mathbb{N}$ ist, macht man eine Wertetabelle und sucht für gegebenes k und p den größten Wert von $\theta \mapsto f_{\theta}(k)$. So wird der ML-Schätzer bestimmt.

Nun ist aber andererseits

$$\mathbb{E}_{\theta}[X] = \theta p \quad \text{und der}$$

Konfidenzintervall von θ somit

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \frac{k}{p}. \quad \text{Falls nun}$$

z. B. p irrational ist, so liegt der Wert von $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ niemals in $\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Aussage ist falsch.

(v) Falsch. Sei $t_{n-1; \beta}$ das

β -Quantil der Studentischen
t-Verteilung mit $n-1$
Freiheitsgraden.

Annahmebereich des zweiseitigen Tests:

$$[-t_{n-1; 1-\alpha/2}, +t_{n-1; 1-\alpha/2}]$$

Annahmebereich des einseitigen Tests:

$$(-\infty, t_{n-1; 1-\alpha}]$$

Da $t_{n-1; 1-\alpha/2} > t_{n-1; 1-\alpha}$
gilt, ist die Aussage falsch.

$$\frac{\partial^2 L(\bar{y}, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum y_i^2$$

$$\frac{\partial^2 L(\bar{y}, \theta)}{\partial \theta^2}$$

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^n y_i^2}{\frac{1}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^3}$$

$$= \frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2} - \frac{2n^3}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2}$$

$$= - \frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2}$$

$$< 0.$$

Nachtrag
zu
Aufgabe 3