

Musterlösung Probeklausur

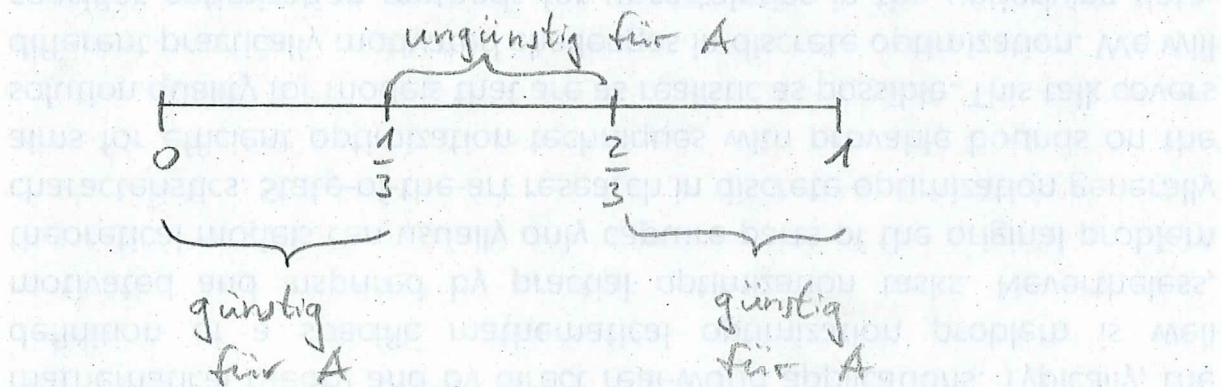
Mathematik 3 SoSe 2022

Zu Aufgabe 1:

(a) $X \sim \text{UNI}[0,1]$

↑ Zufallsvariable, die das Experiment modelliert

$A \triangleq$ Zielereignis



$$\Rightarrow A = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Geometrische W'keit $\Rightarrow$

$$P(X \in A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(b) Sei $Z(X) = \frac{3}{8} \cdot \delta_{1/2} + \frac{5}{8} \cdot \delta_{1/100}$

$$\Rightarrow P(X \in A) = P(X = 1/100) = 5/8$$

Zu Aufgabe 2:

(a) Wir benötigen zwei Bestimmungsgleichungen für die beiden "unbekannten" Werte a und b .

(i) f_x ist normiert, also

$$\int_0^1 f_x(x) dx = 1$$

(ii) $E[X] = 2/3 \Rightarrow \int_0^1 x f_x(x) dx = 2/3$

Aus (i):

$$\left[ax + \frac{b}{3} x^3 \right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow a + \frac{b}{3} = 1 \quad (*)$$

Aus (ii):

$$\left[\frac{a}{2} x^2 + \frac{b}{4} x^4 \right]_0^1 = 2/3 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{4} = \frac{2}{3} \quad (**)$$

Aus (*): $a = 1 - \frac{b}{3}$ Setze dies in

(**) ein $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} - \frac{b}{6} + \frac{b}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2b + 3b = 8$$

$$\Leftrightarrow b = 2$$

$$\text{Also } b = 2 \quad \text{und} \quad a = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow f_x(x) = \frac{1}{3} + 2x^2 \quad \text{für } x \in [0, 1].$$

$$(b) \quad \mathbb{E}[e^x] = \int_0^1 e^x \left(\frac{1}{3} + 2x^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} [e^x]_0^1 + 2 \int_0^1 x^2 \exp(x) dx$$

$$= \frac{1}{3} (e - 1) + 2 \cdot I$$

Löse I mit partieller Integration:

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx$$

$$= e - 2 \tilde{I}.$$

Löse $\tilde{I}$ mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - (e - 1) = 1\end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\begin{aligned}E[e^x] &= \frac{1}{3} (e - 1) + 2e - 4 \\ &= \frac{7}{3} e - \frac{13}{3} = \frac{7e - 13}{3}\end{aligned}$$

158

Zu Aufgabe 3:

(a)

Log-Likelihoodfunktion für Beobachtungseinheit i :

$$l(y_i, \theta) = \ln(2) + \ln(\theta) + \ln(y_i) - \theta y_i^2$$

für $1 \leq i \leq n$ und $y_i > 0$.

Gemeinsame Log-Likelihoodfunktion:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n l(y_i, \theta) &= n \ln(2) + n \ln(\theta) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - \theta \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{aligned}$$

$$=: L(\vec{y}, \theta)$$

$$\frac{\partial L(\vec{y}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$\frac{\partial^2 L(\vec{y}, \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{\theta}_{MLE}(\vec{y}) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

b) $\mathbb{E}_{\theta}[g(Y_1)]$

$$= \int_0^{\infty} 2\theta y^2 \exp(-\theta y^2) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \theta y^2 \exp(-\theta y^2) dy$$

↑
Symmetrie
in y

$$= \theta \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^{-1/2}}\right)^2\right) dy$$

$$= \theta \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^{-1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^{-1/2}} y^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^{-1/2}}\right)^2\right) dy$$

$$= \theta^{-\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^{-1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^{-1/2} \right)^2$$

↑
Hinweis

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta}}$$

Also ist $\theta = \frac{\pi}{4 E_{\theta}[Y_1]}$ und

die Momentenmethode ergibt

$$\hat{\theta}_{\text{MOM}}(\vec{y}) = \frac{\pi}{4 \cdot n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i}$$

Zu Aufgabe 4:

$$Q(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) \approx 12,587$$

Unter H_0 ist Q approximativ

χ^2 -verteilt mit $6-1 = 5$ Freiheitsgraden.

○ $\Rightarrow P(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) = 1$

$$\Leftrightarrow Q(n_i)_{1 \leq i \leq 6} > \chi^2_{5; 1-\alpha}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

$$\approx 11,07$$

laut Tabelle.

○ Da $12,587 > 11,07$ ist, lehnen wir H_0 zum 5% - Niveau ab.

Zu Aufgabe 5:

(i) Richtig, denn

$$P_e(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{und} \quad G(n, k) = \binom{n}{k} \\ = \frac{P_e(n, k)}{k!}$$

und $k \in \{1, \dots, n\}$.

(ii) Falsch. Gegenbeispiel ist etwa

die Lebesgue-dichte $f_{\text{Exp}(17)}$ der

Exponentialverteilung mit Intensitätsparameter $\lambda = 17$, denn

$$f_{\text{Exp}(17)}(0) = 17 > 1$$

(iii) Richtig, denn $\text{Var}(\text{Bernoulli}(p))$

$$= p(1-p) \in [0, 1/4] \quad \text{und}$$

$$\text{Var}(\mathcal{N}(0, 1)) = 1.$$

(iv) Richtig, denn das ist gerade der Dualitätsrate bzgl. Tests und Konfidenzbereichen.

(v) Richtig, denn W'kita liegen stets zwischen Null und Eins und das Produkt zweier Zahlen aus $[0,1]$ ist nach oben durch $1 = \text{Var}(N(0,1))$ beschränkt.