Algorithmentheorie

Daniel Neuen (Universität Bremen)

WiSe 2023/24

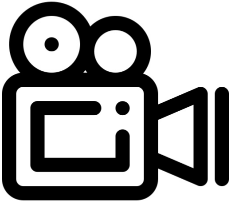
Matchings

12. Vorlesung

Aufzeichnung der Vorlesung

Diese Vorlesung wird aufgezeichnet und live gestreamt.

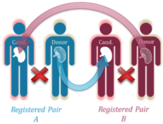
- Aufzeichnungen nur der Lehrenden durch sich selbst.
- Bei Rückfragen aus dem Auditorium und Diskussion bitte deutlich anzeigen, falls das Mikro stumm geschaltet werden soll.



Matchings

Matching = Paarung, Zuordnung

Beispiele: Dating-Apps, Schul-/Uniplatzvergabe, Ressourcenvergabe im Cloud Computing, Auktionen, Cross-Over Organspenden



Paired Exchange

Typische Fragen:

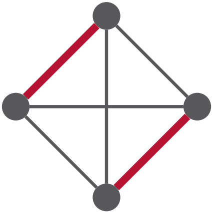
- Welche Zuordnungen (Matchings) sind optimal?
  - bzgl. Anzahl gefundener Paare, Kostenfunktion oder Fairness
- Wie finden wir optimale Zuordnungen?

Matching

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein Matching ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ von Kanten in G mit der Eigenschaft, dass keine zwei Kanten in M einen gemeinsamen Knoten besitzen.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt überdeckt von M, wenn es ein $u \in V$ gibt sodass $(v, u) \in M$.
- Ein Matching M heißt perfekt, wenn M alle Knoten in G überdeckt.

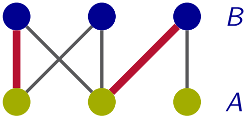


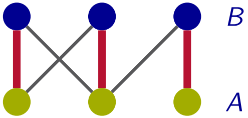
Maximale Matchings und bipartite Graphen

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein Matching M ist nicht erweiterbar (engl. maxim**al**), wenn für jede Kante $e \in E \setminus M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ kein Matching ist.
- Ein Matching M ist kardinalitätsmaximal (engl. maxim**um**), wenn $|M| \geq |M'|$, für alle Matchings M' in G.





Definitionen für beliebige Graphen. **Heute**: Matchings in bipartiten Graphen.

Erinnerung: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, wenn die Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufgeteilt werden kann, so dass keine Kante $e \in E$ beide Endpunkte in derselben Teilmenge hat.

Kardinalitätsmaximale Matchings in bipartiten Graphen

Ein Matching Problem

Kardinalitätsmaximales Matching Problem

Gegeben: ein (bipartiter) Graph $G = (V, E)$.
Gesucht: ein kardinalitätsmaximales Matching M in G, d.h. ein Matching M, so dass für alle Matchings M' in G gilt: $|M| \geq |M'|$.

Beobachtung:

- Für jedes Matching M in $G = (V, E)$ gilt: $|M| \leq |V|/2$.
- Falls M ein perfektes Matching ist, dann: $|M| = |V|/2$.

Satz

In bipartiten Graphen kann ein kardinalitätsmaximales Matching in Polynomialzeit gefunden werden.

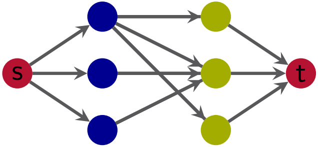
Wir werden zwei Varianten sehen.

Reduktion auf Max-Fluss Problem

Konstruktion

Aus bipartitem Graph $G = (L \cup R, E)$ konstruiere ein Netzwerk G':

- Zunächst $G' = G$. Richte alle Kanten von L nach R, d.h. aus $\{u, v\} \in E$ mit $u \in L$ und $v \in R$ wird $(u, v) \in E'$.
- Füge Knoten s (Quelle) und t (Senke) hinzu sowie Kanten (s, u) für alle $u \in L$ und (v, t) für $v \in R$.
- Setze $c(e) = 1$ für alle Kanten $e \in E'$.



$G' = (L \cup R \cup \{s, t\}, E', s, t, c)$

mit $E' = \vec{E} \cup \{(s, u)\}_{u \in L} \cup \{(v, t)\}_{v \in R}$

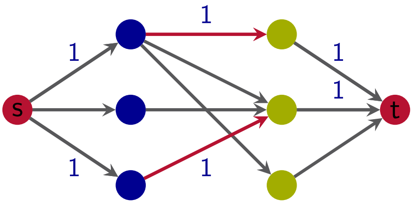
und $c(e) = 1, e \in E'$

Satz

G hat ein Matching der Größe $k \Leftrightarrow G'$ hat einen Fluss mit Flusswert k.

Reduktion auf Max-Fluss Problem

Zu zeigen: G hat ein Matching der Größe $k \Leftrightarrow G'$ hat einen Fluss mit Flusswert k.



$\Rightarrow$: Sei M ein Matching in G mit $|M| = k$. Definiere Fluss in G' über kanten-disjunkte s-t-Pfade, die über Kanten in M gehen. Dies ergibt zulässigen Fluss mit Wert k.

$\Leftarrow$: Betrachte ganzzahligen s-t-Fluss f in G', d.h. $f(e) \in \{0, 1\}, \forall e \in E'$. Die Kanten $e \in E$ mit $f(e) = 1$ bilden ein Matching M, da wegen der Flusserhaltung jeder Knoten in L oder R Endpunkt von maximal einer Kante e mit $f(e) = 1$ ist. Dann ist $|M| = k$. □

Lösen des Matching Problems

1. Konstruktion des Graphen G' in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$.
2. Berechnung eine maximalen Flusses mit Ford-Fulkerson in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot m)$, da maximaler Flusswert durch $n/2$ beschränkt ist.
3. Aus Konstruktion kann kardin.-max Matching abgelesen werden.

Satz

Das kardinalitätsmaximale Matching Problem kann in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot m)$ (per Reduktion auf das Maximale Fluss Problem) gelöst werden.

Fragen:

- Können wir das Matchingproblem direkt lösen?
- Auch in beliebigen Graphen? Ja. (Hier nur Idee.)

M-alternierende und M-augmentierender Pfad

Sei M ein Matching in einem (nicht unbedingt bipartiten) Graphen $G = (V, E)$. Ein M-alternierender Pfad in G ist ein Pfad W in G, der alternierend Matching- und Nicht-Matchingkanten enthält.

Ein Knoten heißt exponiert bzgl. M, wenn er zu keiner Kante in M inzident ist.

Ein M-alternierender Pfad W heißt M-augmentierend, wenn beide Endpunkte exponiert sind. Dann ist $|E(W)|$ ungerade.

Satz von Berge

Idee: Vergrößere ein gegebenes Matching M zu M' durch „Kantentausch“ auf M-augmentierendem Pfad W.

Dies nennn wir die symmetrische Differenz:

$$\begin{aligned} M' = M \Delta E(W) &:= (M \cup E(W)) \setminus (M \cap E(W)) \\ &= M \setminus E(W) \cup E(W) \setminus M \end{aligned}$$

Satz von Berge

Idee: Vergrößere ein gegebenes Matching M zu M' durch „Kantentausch“ auf M-augmentierendem Pfad W.

Dies nennn wir die symmetrische Differenz:

$$
\begin{aligned}
M' = M \Delta E(W) &:= (M \cup E(W)) \setminus (M \cap E(W)) \\
&= M \setminus E(W) \cup E(W) \setminus M
\end{aligned}
$$

Satz von Berge

Idee: Vergrößere ein gegebenes Matching M zu M' durch „Kantentausch" auf M-augmentierendem Pfad W.

Dies nennn wir die symmetrische Differenz:

$$\begin{aligned} M' = M \Delta E(W) &:= (M \cup E(W)) \setminus (M \cap E(W)) \\ &= M \setminus E(W) \cup E(W) \setminus M \end{aligned}$$

Beobachtung: M' ist wieder ein Matching und $|M'| = |M| + 1$.

Satz von Berge

Idee: Vergrößere ein gegebenes Matching M zu M' durch „Kantentausch“ auf M-augmentierendem Pfad W.

Dies nennn wir die symmetrische Differenz:

$$\begin{aligned} M' = M \Delta E(W) &:= (M \cup E(W)) \setminus (M \cap E(W)) \\ &= M \setminus E(W) \cup E(W) \setminus M \end{aligned}$$

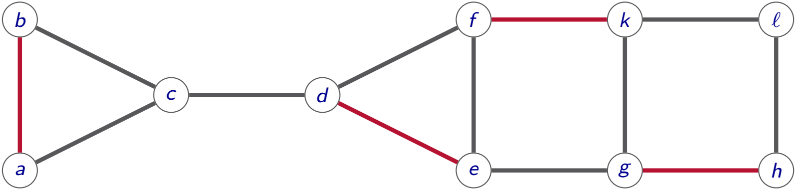
Beobachtung: M' ist wieder ein Matching und $|M'| = |M| + 1$.

Satz (Berge 1957)

Ein Matching M in einem (beliebigen) Graphen ist genau dann kardinalitätsmaximal, wenn es keinen M-augmentierenden Pfad gibt.

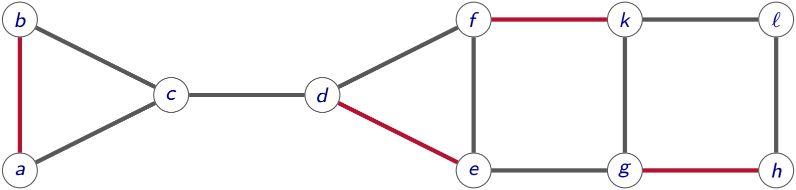
Beispiel

Betrachte folgenden Graphen G mit Matching M:



Beispiel

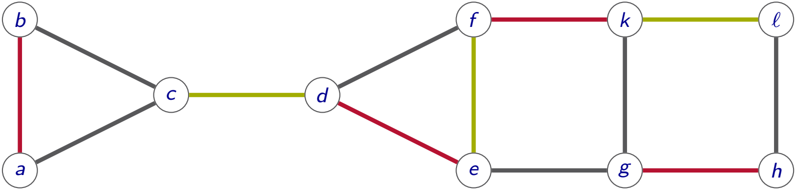
Betrachte folgenden Graphen G mit Matching M:



- Exponierte Knoten bzgl. M: c, ℓ

Beispiel

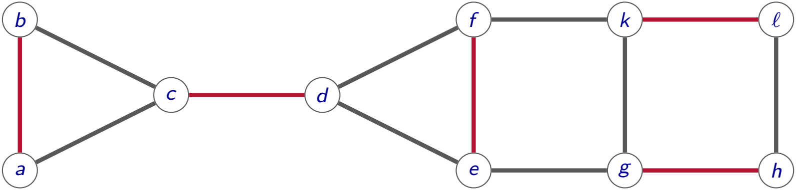
Betrachte folgenden Graphen G mit Matching M:



- Exponierte Knoten bzgl. M: c, ℓ
- M-augmentierender Pfad: (c, d, e, f, k, ℓ)

Beispiel

Betrachte folgenden Graphen G mit Matching M:



- Exponierte Knoten bzgl. M: c, ℓ
- M-augmentierender Pfad: (c, d, e, f, k, ℓ)
- Wir erhalten Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$.

Beweis des Satz von Berge

Satz (Berge 1957)

Ein Matching M in einem (beliebigen) Graphen ist genau dann kardinalitäts-maximal, wenn es keinen M-augmentierenden Pfad gibt.

Beweis. $\Rightarrow$: klar, ein M-augmentierender Pfad würde M vergrößern; Widerspr.

$\Leftarrow$: Angenom. M nicht kard.-maximal, d.h. $\exists$ Matching M' mit $|M'| > |M|$.
Betrachte symmetrische Differenz $M' \Delta M$ und Graph $G' = (V, M \Delta M')$.

Alle Knoten in G' haben Grad ≤ 2. Zusammenhangskomponenten sind

- isolierte Knoten
- Kreise: gleiche Anzahl Kanten bzgl. M und M'
- Pfade: Falls alt. Pfad mit mehr Kanten aus M' als aus M existiert, dann $\exists M$-augm. Pfad, Widerspruch.

Also in $S = M \Delta M'$ gilt $|S \cap M| \geq |S \cap M'|$ und damit $|M| \geq |M'|$. $\square$

Augmentierende Pfade in bipartiten Graphen

Wie finden wir M-augmentierende Pfade? Im allgemeinen nicht leicht.

Idee für bipartite Graphen:

- Richte Nicht-Matchingkanten von $L \to R$ und Matchingkanten von $R \to L$.
- Füge Quelle s hinzu mit Kanten zu exponierten Knoten in L.

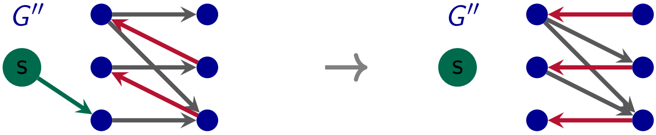
Beobachtung: M-augmentierende Pfade in G sind gerichtete Pfade in G'' mit exponiertem Endknoten.

Satz. Breitensuche BFS(G'', E'') findet exponierten Endknoten in G'' $\Leftrightarrow$ G hat M-augmentierenden Pfad.

Algorithmus für bipartite Graphen

Satz. Breitensuche BFS(G'', E'') findet exponierten Endknoten in G'' $\Leftrightarrow$ G hat M-augmentierenden Pfad.

Algorithmus: Solange ein M-augmentierender Pfad in G existiert (teste via Breitensuche in G''), erhöhe M und aktualisiere G''.



In jeder Iteration wird das Matching um 1 erhöht (terminiert also spätestens nach $|M| \leq |V|/2$ Iterationen; pro Iteration eine BFS in Polynomialzeit).

Satz

Der Algorithmus findet in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot m)$ ein kardinalitätsmaximales Matching M in einem bipartiten Graphen G.

Ausblick: Gewichtete Matchings

Mehr als nur binäre Präferenzen

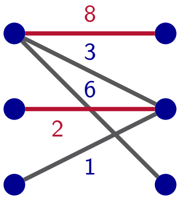
Gewichtsmaximale Matchings

Bisher: Matchings unter binären Präferenzen (akzeptabel/nicht akzept.)

Allgemeiner: Unterschiedliche Präferenzen ausgedrückt durch Bereitschaft unterschiedliche Preise zu zahlen, falls zugeordnet.

Beispiel: AdWord Allocation für Internetsuchmaschinen

Firmen bieten auf Keywords um ihre Werbung zu platzieren. Der Suchmaschinenbetreiber sucht ein Matching von Bietern und Keywords um maximalen Gewinn zu erzielen.



Qualität einer Zuordnung: Summe der Preise, die die einzelnen Teilnehmer für ihre Zuordnung zahlen; hier: 8+2=10.

Gewichtsmaximale Matchings

Gewichtsmaximale Matching Problem

Gegeben: ein (bipartiter) gewichteter Graph $G = (V, E, c)$.
Gesucht: ein gewichtsmaximales Matching M in G, d.h. ein Matching M, so dass für alle Matchings M' in G gilt: $c(M) \geq c(M')$, wobei $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$.

Satz (Kuhn 1955, Munkres 1957)

Ein gewichtsmaximales Matching kann in bipartiten Graphen in $\mathcal{O}(n^3)$ berechnet werden. (Ungarische Methode)

Allgemeiner gilt in beliebigen Graphen.

Satz (Edmonds 1961)

Ein gewichtsmaximales Matching kann in einem beliebigen Graphen in $\mathcal{O}(n^3)$ bestimmt werden. (Blütenalgorithmus)

Allerdings nicht in dieser Vorlesung.

Perfekte Matchings

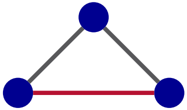
in bipartiten Graphen

Perfektes Matching

Perfektes Matching Problem

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, finde ein perfektes Matching M in G.

Ein Matching M ist perfekt, wenn es alle Knoten V überdeckt. Es gilt dann $|M| = |V|/2$.



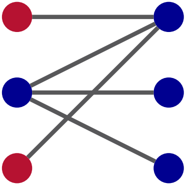
Nicht jeder Graph hat ein perfektes Matching.

Wir betrachten wieder nur bipartite Graphen.

Perfekte Matchings in bipartiten Graphen

Perfektes Matching Problem

Gegeben: ein bipartiter Graph $G = (L \cup R, E)$ mit $|L| = |R|$.
Gesucht: ein perfektes Matching in G.



Es gibt (bipartite) Graphen, in denen kein perfektes Matching existiert.

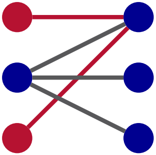
Algorithmus: Berechne kardinalitätsmaximales Matching M. Falls $|M| = |V|/2$, dann ist M auch ein perfektes Matching. Sonst existiert kein perfektes Matching.

Frage: Gibt es ein Zertifikat dafür, dass kein perfektes Matching existiert?

Nachbarschaften und Satz von Hall (Heiratssatz)

Sei $G = (L \cup R, E)$ ein bipartiter Graph. Für jede Teilmenge $S \subseteq L$ sei die Menge der Nachbarn von S (auch Nachbarschaft) gegeben als

$$N(S) = \{u \in R \mid \exists \{u, v\} \in E \text{ mit } v \in S\}.$$



Beobachtung: Es kann kein perfektes Matching in G existieren, wenn es eine Menge $S \subseteq L$ mit $|N(S)| < |S|$ gibt.

Satz (Hall 1935, Frobenius 1917)

Ein bipartiter Graph $G = (L \cup R, E)$ mit $|L| = |R|$ hat genau dann ein perfektes Matching, wenn für alle $S \subseteq L$ in G gilt: $|N(S)| \geq |S|$.

Beweis: ... an Tafel (Anwendung des Max-Fluss/Min-Schnitt Satzes)

Anwendung des Satz von Hall (Heiratssatz)

Allgemeinere Version von Hall auch für $|L| \neq |R|$.

Satz (Hall 1935)

Ein bipartiter Graph $G = (L \cup R, E)$ hat genau dann ein Matching, das L überdeckt, wenn für alle $S \subseteq L$ in G gilt: $|N(S)| \geq |S|$.

Korollar

In jedem k-regulären bipartiten Graphen existiert ein perfektes Matching.

(Ein Graph $G = (V, E)$ ist k-regulär, wenn $\forall v \in V : deg(v) = k$.)

Beweis. Sei $S \subseteq L$. Da G k-regulär und bipartit, ist die Anzahl der Kanten im Schnitt von S gleich $|\delta(S)| = k \cdot |S|$. Betrachte die Nachbarn $N(S) \subseteq R$; die Anzahl der Kanten im Schnitt von $N(S)$ ist $k \cdot |N(S)|$. Aus $|\delta(S)| \leq |\delta(N(S))|$ folgt $|S| \leq |N(S)|$ und nach Hall's Satz existiert ein perfektes Matching. $\square$

Zusammenfassung

- Maximale Matchings
  - Reduktion auf Max Fluss Problem
  - Optimalitätskriterium, Satz von Berge
  - Augmentierende Pfade Algorithmus
- Gewichtete Matchings
- Perfektes Matching
  - Existenz, Satz von Hall (Heiratssatz)