Prof. Dr. Sebastian Siebertz Sommersemester 2024

Theoretische Informatik 2

Blatt 02

Abgabe bis zum 29.04.2024

1. **30 Punkte** Wir betrachten das folgende Subset Sum Problem:
   Eine Instanz von Subset Sum besteht aus einer Multimenge N von natürlichen Zahlen (Zahlen dürfen mehrfach vorkommen) und einer natürlichen Zahl k. Eine Instanz ist *positiv*, falls eine Teilmenge $M \subseteq N$ existiert, so dass

$$\sum_{m \in M} m = k.$$

   Beispiel:

   - $(M = \{2, 3, 12, 2, 9\}, k = 7)$ ist eine positive Instanz, da $2+3+2 = 7$.
   - $(M = \{2, 3, 12, 2, 9\}, k = 100)$ ist eine negative Instanz.

   Wir formulieren Subset Sum als ein Entscheidungsproblem $\mathcal{S}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Eine Eingabe $E = (\{m_1, \ldots, m_\ell\}, k)$ kodieren wir als

$$\text{code}(E) = \text{bin}(m_1)\#\text{bin}(m_2)\#\ldots\#\text{bin}(m_\ell)\#\text{bin}(k) \in \Sigma^*.$$

   Dann ist

$$\mathcal{S} = \{\text{code}(E) \ : \ E \text{ positive Instanz von Subset Sum}\}.$$

   Beschreibt eine nichtdeterministische Turingmaschine, die Subset Sum entscheidet (es muss keine vollständige formale Definition einer Turingmasche angegeben werden).

2. **30 Punkte** Es sei Σ ein geordnetes Alphabet. Beweist folgende Aussage: Ein unendliches Problem $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn es eine deterministische Mehrband-Turingmaschine gibt, die die Wörter aus L in lexikographischer Reihenfolge aufzählt.

   Wir sagen, dass eine Maschine M eine Sprache L aufzählt, wenn es einen besonderen Zustand $q \in Q$ gibt, so dass

(a) es für alle $w \in L$ einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wort $[w\sqcup\ldots$ auf Band 1 geschrieben ist und der Kopf sich auf Band 1 an Position $|w|+1$ befindet (wir sagen, dass w zu diesem Zeitpunkt aufgezählt wird),

(b) wann immer M sich im Zustand q befindet, so ist Band 1 mit $[w\sqcup\ldots$ beschriftet für ein $w \in L$ und der Kopf befindet sich auf Band 1 an Position $|w|+1$.

M zählt L in lexikographischer Reihenfolge auf, wenn es die Wörter $w \in L$ in (a) in lexikographischer Reihenfolge bezüglich der Ordnung auf Σ aufzählt.

In der lexikographische Reihenfolge der Wörter über einem geordneten Alphabet Σ stehen kürzere Wörter vor längeren: Falls $|u| < |v|$, dann $u <_{\text{lex}} v$, und gleich lange Wörter sind alphabetisch sortiert (abhängig von der Ordnung auf Σ).

Beispiel: Sei $\Sigma = \{a, b\}$ geordnet, sodass $a <_{\text{lex}} b$). Die lexikographische Reihenfolge von Σ^* ist

$$\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots.$$

Die lexikographische Reihenfolge von $\{w \in \Sigma^* : \text{“gleich viele } a\text{s wie } b\text{s”}\}$ ist

$$\varepsilon, ab, ba, aabb, abab, abba, \ldots.$$

3. **20 Punkte** Gegeben sei eine deterministische Turingmaschine M mit q Zuständen und einem Arbeitsalphabet der Größe γ. Angenommen, es gibt eine Funktion $s : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, so dass die Berechnung von M auf einem Eingabewort w maximal $s(|w|)$ Speicherzellen auf dem Arbeitsband besucht. Beweist, dass jede Berechnung von M auf einem Wort w, wenn sie terminiert, nach höchstens $q \cdot \gamma^{s(|w|)} \cdot s(|w|)$ Schritten terminiert.

4. **20 Punkte** Zeigt, dass die entscheidbaren Sprachen abgeschlossen sind unter Schnitt ($\cap$), Vereinigung ($\cup$) und Komplement ($\overline{}$).

5. **20 Bonuspunkte** Es sei Σ ein Alphabet. Beweist folgende Aussage: Ein Problem $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn es eine deterministische Mehrband-Turingmaschine gibt, die die Wörter aus L in einer beliebigen Reihenfolge aufzählt.

Die folgenden Aufgaben werden im Tutorium besprochen und müssen nicht zur Korrektur abgegeben werden.

6. Es sei Σ ein Alphabet. Gebt eine nichtdeterministische Turingmaschine an, die die Sprache

$$L = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \text{es existieren } v \in \Sigma^* \text{ und } i \geq 2 \text{, so dass } w = v^i \right\}$$

entscheidet.

Beispiele:

- $aa \in L$.
- $abbabbabbabb \in L$.
- $\varepsilon \in L$.
- $a \notin L$.
- $ab \notin L$.
- $aabb \notin L$.

7. Es seien L_1 und L_2 entscheidbare Sprachen über einem Alphabet Σ.

(a) Zeigt, dass die Sprache

$$L_1 \times L_2 = \{(u, v) \mid u \in L_1, v \in L_2\}$$

entscheidbar ist.

(b) Zeigt, dass die Sprache

$$L_1/L_2 = \{u \in \Sigma^* \mid \text{es existiert } v \in L_2 \text{, so dass } uv \in L_1\}$$

semi-entscheidbar ist.

8. Zeigt, dass die entscheidbaren Sprachen abgeschlossen sind unter Kleene Stern, d.h., wenn $L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar, dann auch

$$L^* = \{w \in \Sigma^* \mid w = v_1 \dots v_\ell \text{ für } v_1, \dots, v_\ell \in L, \ell \in \mathbb{N}\}.$$