Prof. Dr. Sebastian Siebertz Sommersemester 2024

Theoretische Informatik 2

Blatt 09

Abgabe bis zum 24.06.2024

---

1. 10 + 30 Punkte.

(a) Zeigt, dass folgendes Problem 3-Color in NP liegt.

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Existiert eine Abbildung $c : V \to \{\textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{green}{\bullet}\}$, sodass $c(u) \neq c(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$?

(b) Gebt eine Polynomialzeitreduktion 3-Color $\leq_p$ SAT an und zeigt die Korrektheit eurer Reduktion.

2. 10 + 30 Punkte.

(a) Zeigt, dass folgendes Problem Feedback Vertex Set in NP liegt:

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, natürliche Zahl k.
Frage: Hat G ein *feedback vertex set* der Größe k? Das heißt, gibt es eine Teilmenge $U \subseteq V$ der Größe k, sodass $G - U$ kreisfrei ist?

(b) Vertex Cover ist NP-vollständig. Beweist, dass auch Feedback Vertex Set NP-vollständig ist.

Die folgenden Aufgaben werden im Tutorium besprochen und müssen nicht zur Korrektur abgegeben werden.

3. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) $n^3 \in \mathcal{O}(n^2)$

(b) $2^n \in \mathcal{O}(n!)$ wobei $0! = 1! = 1$ und $(n+1)! = n!(n+1)$

(c) $n! \in \mathcal{O}(2^n)$

(d) $3^n \in \mathcal{O}(2^n)$

(e) $3^n \in \bigcup_{p \text{ Polynom in } n} \mathcal{O}(2^{p(n)})$

4. Sind die folgenden aussagenlogischen Formeln erfüllbar?

(a) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \to x_2)$

(b) $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$

(c) $(x_1 \vee x_2) \to (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee (x_1 \wedge x_2))$

5. Zeigt, dass folgendes Problem Independent Set in NP liegt:

> **Eingabe:** Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, natürliche Zahl k.
>
> **Frage:** Hat G ein *independent set* der Größe k? Das heißt, gibt es eine Teilmenge $U \subseteq V$ der Größe k, sodass für alle $u, v \in U$ gilt: $\{u, v\} \notin E$?

6. Zeigt, dass folgendes Problem Vertex Cover in NP liegt:

> **Eingabe:** Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, natürliche Zahl k.
>
> **Frage:** Hat G ein *vertex cover* der Größe k? Das heißt, gibt es eine Teilmenge $U \subseteq V$ der Größe k, sodass für alle $\{u, v\} \in E$ gilt: $\{u, v\} \cap U \neq \emptyset$?

7. Das Independent Set Problem ist NP-vollständig. Zeigt, dass auch Vertex Cover NP-vollständig ist.

8. Gebt eine Polynomialzeitreduktion Vertex Cover $\leq_p$ SAT an und zeigt die Korrektheit eurer Reduktion.