Prof. Dr. Sebastian Siebertz Sommersemester 2024

Theoretische Informatik 2

Blatt 11

Abgabe bis zum 01.07.2024 (nur Bonuspunkte)

1. (30 Bonuspunkte)

Das Hitting Set Problem ist das folgende Problem:

Eingabe: Ein Mengensystem $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ und eine Zahl k.

Frage: Gibt es ein hitting set der Größe höchstens k, d.h. eine Menge $H \subseteq \bigcup_{1 \le i \le n} S_i$, so dass $S_i \cap H \neq \emptyset$ für alle $1 \le i \le n$?

Beweist, dass wenn SETH gilt, so kann Hitting Set mit n Mengen und Parameter k für beliebiges festes $\epsilon > 0$ nicht in Zeit $\mathcal{O}(n^{k-\epsilon})$ gelöst werden.

2. (30 Bonuspunkte)

Das Biggest Clique Problem ist das Folgende Problem:

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.

Frage: Gibt es eine Clique der Größe k in G, aber keine der Größe $k + 1$?

Zeigt, dass Biggest Clique in PSpace liegt.

3. (40 Bonuspunkte)

Sei PSpace' wie PSpace definiert, mit der zusätzlichen Bedingung, dass die DTM auf jeder Eingabe terminiert. Zeigt, dass $\mathsf{PSpace} = \mathsf{PSpace}'$.

Die folgenden Aufgaben werden im Tutorium besprochen und müssen nicht zur Korrektur abgegeben werden.

4. Zeigt, dass das Halteproblem NP-schwer ist.

5. Das Knapsack Problem (gesprochen Näppsäck) ist das folgende Problem:

> **Eingabe:** Eine endliche Menge von Objekten U, eine Profitfunktion $p : U \to \mathbb{N}$, eine Gewichtsfunktion $w : U \to \mathbb{N}$ und zwei Zahlen $P, W \in \mathbb{N}$.
>
> **Frage:** Können Objekte mit Profit mindestens P in einen Rucksack mit Kapazität W gepackt werden, d.h., gibt es eine Teilmenge $I \subseteq U$, so dass $\sum_{u \in I} w(u) \leq W$ und $\sum_{u \in I} p(u) \geq P$?

Zeigt, dass Knapsack NP-vollständig ist.

6. Das Bin Packing Problem ist das folgende Problem:

> **Eingabe:** Eine endliche Menge von Objekten U eine Gewichtsfunktion $w : U \to \mathbb{N}$ und zwei Zahlen $k, W \in \mathbb{N}$.
>
> **Frage:** Können die Objekte auf k Behälter der Kapazität W gepackt werden, so dass kein Behälter überläuft, d.h., gibt es eine Funktion $f : U \to \{1, \ldots, k\}$, so dass für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt $\sum_{f(u)=j} w(u) \leq W$?

Zeigt, dass Bin Packing NP-vollständig ist.

7. Das Hamilton Path Problem ist das folgende Problem:

> **Eingabe:** Ein ungerichteter Graph G.
>
> **Frage:** Gibt es einen Pfad P, der jeden Knoten des Graphen genau einmal besucht?

Zeigt, dass Hamilton Path NP-vollständig ist.

8. Das Longest Path Problem ist das folgende Problem:

> **Eingabe:** Ein ungerichteter Graph G und $k \in \mathbb{N}$.
>
> **Frage:** Gibt es in G einen Pfad P der Länge mindestens k?

Zeigt, dass Longest Path NP-vollständig ist.