Universität Bremen

Wintersemester 2023/2024

Theoretische Informatik 1

Blatt 2

Abgabe: 07.11.2022

Präsenzaufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

$$L_1 = \{w \mid |w|_a = 2n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$
$$L_2 = \{w \mid |w|_a = 2|w|_b\}.$$
$$L_3 = (\{a\} \cdot \{b\})^* \cdot \{a\}.$$
$$L_4 = \{x_1 \dots x_n \mid n \geq 1 \wedge x_1 = x_n\}.$$

Beschreibt die folgenden Sprachen sowohl informell (mit Worten) als auch in formaler Weise, ähnlich wie $L_1, \dots, L_4$ in der Aufgabenstellung.

a) $L_1 \cap L_2$

b) $L_1 \cap L_2 \cap L_3$

c) $L_3 \cup L_4$

d) $\overline{L_1}$

e) $\overline{L_4}$

f) L_2^*

g) $(\overline{L_1})^*$

h) $L_3 \cup \overline{L_3}$

Präsenzaufgabe 2

Gebt für folgende Sprachen L_i einen NEA an, der L_i akzeptiert.

a) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{ auf jedes a in } w \text{ folgen unmittelbar mindestens 2 } b\}$.

b) $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \text{ ist durch 3 teilbar}\}$.

c) $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält höchstens ein } b \text{ und endet mit } a\}$.

Präsenzaufgabe 3

Beweist oder widerlegt folgende Aussagen:

1. Für alle Sprachen L_1, L_2 und L_3 gilt:
$$(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3).$$
2. Wenn $|L_1| = n$ und $|L_2| = m$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$, dann $|L_1 \cdot L_2| = nm$.
3. Für jeden NEA $\mathcal{A}$ mit n Zuständen gilt: Falls $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, dann gibt es ein $w \in L(\mathcal{A})$ mit $|w| \leq n - 1$.
4. Für alle Sprachen L_1, L_2 gilt: wenn $L_1 \subseteq L_2^*$, dann $L_1^* \subseteq L_2^*$.
5. Für alle Sprachen L_1, L_2 gilt: wenn $L_1 \subseteq L_2^*$, dann $L_1^* \cdot L_2^* = L_2^*$.
6. Für alle Sprachen L_1, L_2 gilt $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$.

Aufgabe 1 — 4 Punkte

Zeigt per Induktion über die Länge von w: Für alle Wörter $w \in \{a, b\}^*$ gilt $|w|_a + |w|_b = |w|$.

Aufgabe 2 — 2+2+2+2=8 Punkte

Zeigt oder widerlegt folgende Behauptungen:

a) $\overline{\{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*} = \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

b) $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$.

c) $L \cup L^* = L^*$.

d) $(L_1^* \cdot L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

Aufgabe 3 — 1+1+1+1=4 Punkte

Gebt für folgende formale Sprachen L_i einen NEA an, der L_i akzeptiert.

a) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält } baab \text{ als Teilwort}\}$.

b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ lässt den Rest 2 bei Division durch 4}\}$.

c) $L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \text{ ist durch 2 oder 3 teilbar}\}$.

d) $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält höchstens drei } a \text{ und endet mit } b\}$.

Aufgabe 4 — 4 Punkte

Für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$, sei $L_{n,m} = \{a^{n+km} \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Zeigt, dass jede Sprache $L_{n,m}$ regulär ist. Stellt den Automaten für $L_{4,3}$ graphisch dar.