Kapitel 1
Zufall und Wahrscheinlichkeit

Thorsten Dickhaus

Universität Bremen
Institut für Statistik

Mathematik 3: Stochastik
Universität Bremen, Fachbereich 03, SoSe 2025

Übersicht

1 Zufall und Mathematik

2 Wahrscheinlichkeitsräume

3 Wahrscheinlichkeitsbegriffe

4 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit

Übersicht

1 Zufall und Mathematik

2 Wahrscheinlichkeitsräume

3 Wahrscheinlichkeitsbegriffe

4 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit

Zufall und Mathematik

Ursachen von ”Zufall”:

(i) Naturinhärente Indeterminiertheit

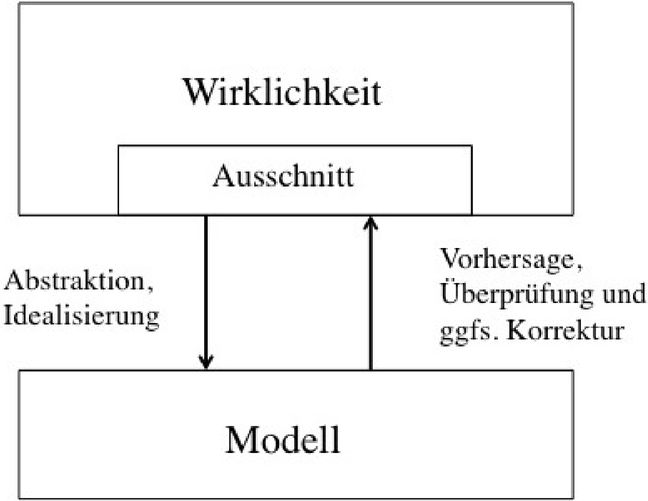
(ii) unsere Unkenntnis über die genauen Rahmenbedingungen der Situation

Aufgaben der Mathematik:

(i) Abstraktion der Wirklichkeit, Modellbildung

(ii) stochastischer Kalkül im aufgestellten Modell

(iii) Rückschluss auf die Wirklichkeit


Wirklichkeit
Ausschnitt
Abstraktion,
Idealisierung
Vorhersage,
Überprüfung und
ggfs. Korrektur
Modell

Stochastik

<u>Wahrscheinlichkeitstheorie:</u>

- Beschreibung zufälliger Vorgänge
- Untersuchung von (gegebenen) Modellen
- Mathematik des Zufalls

→Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

<u>Statistik:</u>

- Umgang mit den Zufall
- Schlussfolgerungen aus Beobachtungen (Daten) auf Charakteristika des Modells ziehen

Problem des abgebrochenen Spiels, Pacioli 1494, Fermat/Pascal 17. Jhdt

Zwei Spieler spielen um einen hälftigen Einsatz ein faires Spiel. Den Einsatz bekommt der Spieler, der zuerst sechs Runden gewonnen hat. Beim Stand von 5:3 für Spieler 1 muss das Spiel abgebrochen werden. Wie sollten sich die Spieler den Einsatz aufteilen?

Lösung (später):

Die ,,gerechte" Aufteilung ist 7:1 zu Gunsten von Spieler 1.

Geometrische Wahrscheinlichkeit

Wähle zwei Punkte x, y zufällig, jeweils im Einheitsintervall $[0, 1]$. Betrachte das (möglicherweise degenerierte) Rechteck in $[0, 1]^2$ mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ und (x, y). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Rechteck eine Fläche von mehr als 1/2 besitzt?

Lösung (später):

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $(1 - \log 2)/2 \cdot 100\%$.

Übersicht

1 Zufall und Mathematik

2 Wahrscheinlichkeitsräume

3 Wahrscheinlichkeitsbegriffe

4 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit

Mathematische Modellierung von Zufallssituationen

Drei Schritte:

1) Festlegung eines Ergebnisraums (Grundraums): Ω
2) Festlegung der Menge (σ-Algebra) der interessierenden Ereignisse: $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$, Ereignis: $A \subseteq \Omega$
3) Wahrscheinlichkeitsbewertung der Ereignisse: $\mathbb{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$ ($\mathbb{P}$: „probability”)

   Mathematisch gesehen ist $\mathbb{P}$ eine Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $[0, 1]$.

Mathematische Modellierung von Zufallssituationen

Drei Schritte:

1) Festlegung eines Ergebnisraums (Grundraums): Ω
2) Festlegung der Menge (σ-Algebra) der interessierenden Ereignisse: $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$, Ereignis: $A \subseteq \Omega$
3) Wahrscheinlichkeitsbewertung der Ereignisse: $\mathbb{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$ ($\mathbb{P}$: „probability”)

   Mathematisch gesehen ist $\mathbb{P}$ eine Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $[0, 1]$.

Mathematische Modellierung von Zufallssituationen

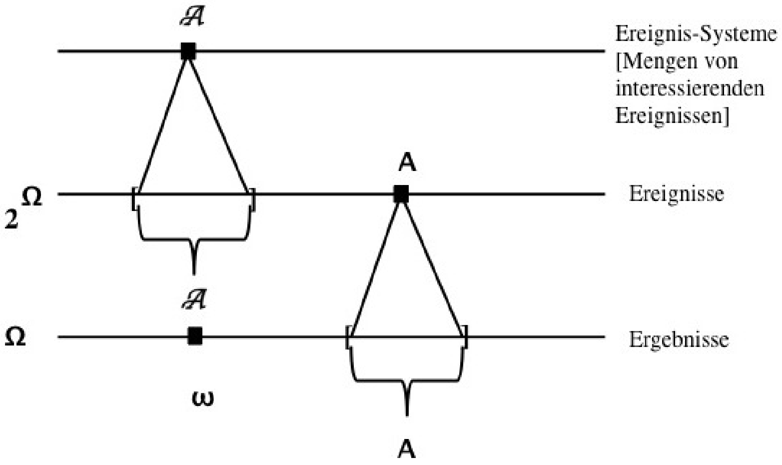
Drei Schritte:

1) Festlegung eines Ergebnisraums (Grundraums): Ω
2) Festlegung der Menge (σ-Algebra) der interessierenden Ereignisse: $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$, Ereignis: $A \subseteq \Omega$
3) Wahrscheinlichkeitsbewertung der Ereignisse: $\mathbb{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$ ($\mathbb{P}$: ,,probability")

   Mathematisch gesehen ist $\mathbb{P}$ eine Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $[0,1]$.

Beispiele

Zufallsexperiment	Grundraum Ω	Ereignis $A \subseteq \Omega$
Einfacher Würfelwurf	$\{1, 2, \cdots, 6\}$	„gerade Zahl": $A = \{2, 4, 6\}$
Roulette-Spiel	$\{0, 1, \cdots, 36\}$	„1. Dutzend": $A = \{1, 2, \cdots, 12\}$
Messung eines Körpergewichts [kg]	$\mathbb{R}_{>0}$	„Übergewicht laut Fahrstuhl": $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 75\}$
Unendlich oft wiederholter Münzwurf	$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} : \omega_i \in \{0, 1\}\}$	$A = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 0 \ \forall 1 \leq i \leq 5\}$


$\mathcal{A}$
Ereignis-Systeme [Mengen von interessierenden Ereignissen]
A
2^Ω
Ereignisse
$\mathcal{A}$
Ω
Ergebnisse
ω
A

Wahrscheinlichkeitsraum

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist Ω höchstens abzählbar, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist Ω überabzählbar, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein stetiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Wahrscheinlichkeitsraum

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist Ω höchstens abzählbar, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist Ω überabzählbar, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein stetiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Wahrscheinlichkeitsraum

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist Ω höchstens abzählbar, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Ist Ω überabzählbar, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein stetiger Wahrscheinlichkeitsraum.

Übersicht

1 Zufall und Mathematik

2 Wahrscheinlichkeitsräume

3 Wahrscheinlichkeitsbegriffe

4 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit

„Klassischer" Wahrscheinlichkeitsbegriff (Pascal, Fermat, Bernoulli, Laplace)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist gegeben als das Verhältnis der Zahl der (für A) günstigen Ergebnisse zu der aller möglichen Ergebnisse; vorausgesetzt, alle Ergebnisse (in Ω) sind gleich wahrscheinlich.

<u>in Formeln:</u>

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Probleme des klassischen W'keitsbegriffs

1. Ringschluss: Wahrscheinlichkeit wird ,,definiert" darüber, dass alle Ergebnisse dieselbe Wahrscheinlichkeit haben.
2. Kann nicht mit Fällen umgehen, in denen die Voraussetzung der gleichen Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse verletzt ist.

„Statistischer" Wahrscheinlichkeitsbegriff (Ellis, Bode, Venn, von Mises)

Ein Ereignis A trete zufällig auf.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit von A „definiert" als der „Grenzwert" der Folge

$$p_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

der relativen Häufigkeit des Eintretens von A bei n Versuchen für $n \to \infty$, wobei

$$n_A = \#\{1 \leq j \leq n : A \text{ tritt im } j\text{-ten Versuch ein}\}.$$

Probleme des statistischen W'keitsbegriffs

1. Der "Grenzwert"
$$\lim_{n\to\infty} p_n(A)$$
muss weder existieren noch eindeutig bestimmt sein.
2. Viele Vorgänge sind nicht wiederholbar, z. B.
$A = \{$Herr X war der Täter$\}$.

Bayes'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff (nach Rev. Thomas Bayes, 18. Jhdt.)

Die W'keit eines Ereignisses A ist subjektiv "definiert" als der Grad der persönlichen Überzeugung (englisch: degree of belief), die ich A beimesse.

Dieser Grad der persönlichen Überzeugung kann sich im Lichte neuer Informationen ändern (englisch: update of beliefs).

Dies führt zu den Begriffen a priori-Wahrscheinlichkeit von A und a posteriori-Wahrscheinlichkeit von A.

Dazu später mehr...

Axiomatischer W'keitsbegriff nach Kolmogoroff (1903 - 1987)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ über einem Ergebnisraum $\Omega \neq \emptyset$ ist eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften.

$(P1)$ Nicht-Negativität: $\mathbb{P}(A) \geq 0 \; \forall A \in \mathcal{A}$

$(P2)$ Normiertheit: $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = 100\%$ ("sicheres Ereignis")

$(P3)$ σ-Additivität: Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, von paarweise disjunkten Mengen (d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$) gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Der Begriff ”Verteilung”

Sofern nicht ausdrücklich anders gesagt arbeiten wir ab sofort mit dem axiomatischen W’keitsbegriff nach Kolmogoroff.

Statt des Begriffs ”W’keitsmaß” werden (synonym) auch die Begriffe ”W’keitsverteilung” oder auch einfach nur ”Verteilung” benutzt.

Genauer gesagt verstehen wir unter einer Verteilung auf Ω ein W’keitsmaß $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$, wenn klar ist, was die (interessierende) Ereignis-σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω ist.

Übersicht

1 Zufall und Mathematik

2 Wahrscheinlichkeitsräume

3 Wahrscheinlichkeitsbegriffe

4 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit

Rechenregeln für W'keitsmaße (I)

(a) Endliche Additivität: Für $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

(b) Gegenwahrscheinlichkeit:

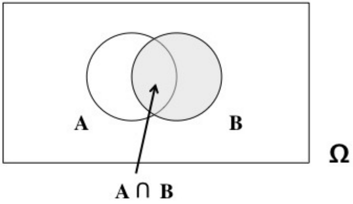
$\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}\left(\complement A\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Insbesondere ist $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ („unmögliches Ereignis").

Rechenregeln für W'keitsmaße (II)

(c) Wertebereich: $\forall A \in \mathcal{A} : 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

(d) W'keit einer Vereinigung zweier Ereignisse:
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.



Rechenregeln für W'keitsmaße (III)

(e) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, nicht notwendigerweise paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

(Siebformel von Poincaré und Sylvester, inclusion-exclusion principle, Additionsformel, ...).

Beispielsweise ist für $n = 3$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &- \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &+ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

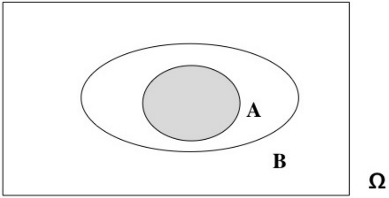
Rechenregeln für W'keitsmaße (IV)

(f) Sub-Addivität: Unter den Voraussetzungen von (e) gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

(g) Monotonie:

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \backslash A) + \mathbb{P}(A), \quad A, B \in \mathcal{A}.$$



Übersicht

1 Zufall und Mathematik

2 Wahrscheinlichkeitsräume

3 Wahrscheinlichkeitsbegriffe

4 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit

Beispiel: Zahlenlotto „6 aus 49” (I)

Wir betrachten den Grundraum

$$\Omega = \{\omega \subset \{1, \cdots, 49\} : |\omega| = 6\} \text{ mit } |\Omega| = \binom{49}{6} \approx 1{,}4 \cdot 10^7.$$

Als Ereignis-σ-Algebra $\mathcal{A}$ nehmen wir die Potenzmenge von Ω. Das bedeutet, dass alle Teilmengen von Ω als Ereignisse in Frage kommen.

Als Wahrscheinlichkeitsmaß betrachten wir die diskrete Gleichverteilung auf Ω, so dass gilt:

$$\forall A \in 2^\Omega : \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{\binom{49}{6}}$$

Beispiel: Zahlenlotto „6 aus 49” (II)

Angenommen, Frau N. spielt Lotto. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie „6 Richtige” getippt hat, ist

$$\mathbb{P}(\{\omega^*\}) = \frac{1}{|\Omega|} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad \omega^* = \text{Tipp von Frau N.}$$

Angenommen, Frau N. verfolgt die Ziehung live und hat nach dem Ziehen der ersten fünf Kugeln bereits „5 Richtige”.

Gegeben diese Information ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auch „6 Richtige” getippt hat, gleich $\frac{1}{44}$, weil hierzu nur noch die fehlende Zahl aus den verbleibenden 44 Kugeln gezogen werden muss.

Beispiel: Zahlenlotto „6 aus 49” (II)

Angenommen, Frau N. spielt Lotto. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie „6 Richtige” getippt hat, ist

$$\mathbb{P}(\{\omega^*\}) = \frac{1}{|\Omega|} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad \omega^* = \text{Tipp von Frau N.}$$

Angenommen, Frau N. verfolgt die Ziehung live und hat nach dem Ziehen der ersten fünf Kugeln bereits „5 Richtige”.

Gegeben diese Information ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auch „6 Richtige” getippt hat, gleich $\frac{1}{44}$, weil hierzu nur noch die fehlende Zahl aus den verbleibenden 44 Kugeln gezogen werden muss.

Beispiel: Zahlenlotto „6 aus 49" (II)

Angenommen, Frau N. spielt Lotto. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie „6 Richtige" getippt hat, ist

$$\mathbb{P}(\{\omega^*\}) = \frac{1}{|\Omega|} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-8}, \quad \omega^* = \text{Tipp von Frau N.}$$

Angenommen, Frau N. verfolgt die Ziehung live und hat nach dem Ziehen der ersten fünf Kugeln bereits „5 Richtige".

Gegeben diese Information ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auch „6 Richtige" getippt hat, gleich $\frac{1}{44}$, weil hierzu nur noch die fehlende Zahl aus den verbleibenden 44 Kugeln gezogen werden muss.

Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ ein Ereignis. Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von $A \in \mathcal{A}$ gegeben (unter der Bedingung) B definiert durch

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Beispiel: Zahlenlotto „6 aus 49” (III)

Unter den Gegebenheiten des vorigen Lotto-Beispiels seien

$$\begin{aligned} A &= \{\omega^*\} = \text{„6 Richtige”}, \\ B &= \{\text{„5 Richtige” nach fünf gezogenen Kugeln}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{\omega^*\})}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{1/\binom{49}{6}}{6/\binom{49}{5}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\binom{49}{5}}{\binom{49}{6}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{49!\ 6!\ 43!}{5!\ 44!\ 49!} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{44} = \frac{1}{44}. \end{aligned}$$

Rechenregeln der bedingten W'keit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_1, \dots, A_n$ Ereignisse in $\mathcal{A}$, so dass alle folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten definiert sind. Dann gelten:

(a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$

(b) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) =$
$\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right)$
(Kettenfaktorisierung)

Spezialfall der Kettenfaktorisierung

(c) Falls $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n$, so folgt aus (b), dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{j=2}^{n} \mathbb{P}(A_j | A_{j-1}).$$

Die Eigenschaften (b) und (c) lassen sich grafisch in einem Baum darstellen, dessen Knoten die Ereignisse und dessen (gerichtete) Kanten die Inklusionen repräsentieren.

Beispiel: Zahlenlotto „6 aus 49” (IV)

Bezeichne beim Lotto „6 aus 49” A_i das Ereignis, dass nach Ziehen der i-ten Kugel bereits „i Richtige” für den Tipp ω^* vorliegen, $1 \leq i \leq 6$.

Dann ergibt sich das folgende Schema:

$$\underset{\frac{6}{49}}{A_1} \xrightarrow{\frac{5}{48}} A_2 \xrightarrow{\frac{4}{47}} A_3 \xrightarrow{\frac{3}{46}} A_4 \xrightarrow{\frac{2}{45}} A_5 \xrightarrow{\frac{1}{44}} A_6$$

Beispiel: Zahlenlotto „6 aus 49” (V)

Nach Kettenfaktorisierung gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\omega^*\}) &= \mathbb{P}(A_6) \\
&= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_6|A_5) \\
&= \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} \\
&=: \frac{6!}{(49)_6} = \frac{1}{\binom{49}{6}}.
\end{aligned}$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, Zerlegungsformel

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W'keitsraum. Es sei $(B_i)_{i\in I}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω, wobei I eine höchstens abzählbare Indexmenge bezeichnet, und es gelte $\mathbb{P}(B_i) > 0 \; \forall i \in I$.

Es sei also

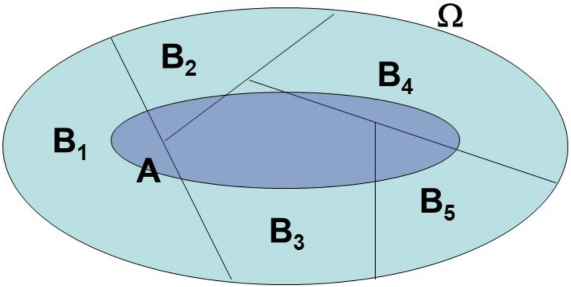
$$\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega \quad \text{und} \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$, dass

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i).$$

Veranschaulichung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit durch ein Venn-Diagramm:

für den Spezialfall n=5



$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4) \cup (A \cap B_5)$$

https://slideplayer.org/slide/1283930/3/images/41/Veranschaulichung+des+Satzes+der+totalen+Wahrscheinlichkeit+durch+ein+Venn-Diagramm%3A.jpg

Satz von Bayes, nach Rev. Thomas Bayes

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)} \quad \text{bzw.} \\ \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B). \end{aligned}$$

Bemerkungen zum Satz von Bayes

$\mathbb{P}(B)$ heißt a priori-Wahrscheinlichkeit von B und $\mathbb{P}(B|A)$ heißt a posteriori-Wahrscheinlichkeit von B.

Fasst man B als eine Ursache und A als eine Wirkung auf, so liefert $\mathbb{P}(B|A)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A aufgrund der Ursache B aufgetreten ist.

Der Satz von Bayes (und seine Verallgemeinerungen) bilden die Grundlage der ,,Bayesianischen Statistik".

Beispiel zum Satz von Bayes (I)

Angenommen, drei Maschinen produzieren das gleiche Teil.
Die Tagesproduktionen (in Stück) seien gegeben durch

$$\left\{\begin{array}{ll} 1.\ \text{Maschine:} & 6000 \\ 2.\ \text{Maschine:} & 1000 \\ 3.\ \text{Maschine:} & 3000 \end{array}\right\}.$$

Insgesamt werden also 10.000 Teile pro Tag produziert.

Beispiel zum Satz von Bayes (II)

Der durchschnittliche Ausschussanteil (erwartete relative Häufigkeit von produzierten Stücken, die eine gewisse Qualitätsnorm nicht erfüllen) sei

$$\left\{\begin{array}{ll} 1.\ \text{Maschine:} & 10\% \\ 2.\ \text{Maschine:} & 8\% \\ 3.\ \text{Maschine:} & 15\% \end{array}\right\}.$$

Beispiel zum Satz von Bayes (III)

Angenommen, Sie bekommen ein Stück geliefert, das sich als Ausschuss erweist.

Berechnen Sie für $1 \leq i \leq 3$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}($,,Dieses Stück wurde von Maschine i produziert"$)$.

Beispiel zum Satz von Bayes (IV)

Lösung:

Sei $A = \{$Ein produziertes Teil ist Ausschuss.$\}$. Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit liefert

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i),$$

wobei $B_i = \{$Stück wurde von Maschine i produziert$\}$.

Nach Voraussetzungen ist
$\mathbb{P}(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}08 \cdot 0{,}1 + 0{,}15 \cdot 0{,}3 = 0{,}113$.

Beispiel zum Satz von Bayes (V)

Nach dem Satz von Bayes ergeben sich somit

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}1}{0{,}113} \approx 53\%,$$

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}08}{0{,}113} \approx 7\%,$$

$$\mathbb{P}(B_3|A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}15}{0{,}113} \approx 40\%.$$

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heißen stochastisch unabhängig (in Zeichen: $A \perp\!\!\!\perp B$), falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

b) Für eine beliebige Indexmenge $I \neq \emptyset$ heißen $(A_i)_{i \in I}$ mit $A_i \in \mathcal{A} \; \forall i \in I$ stochastisch unabhängig, falls für jede nicht-leere, endliche Teilmenge $K \subseteq I$ gilt, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in K} A_k\right) = \prod_{k \in K} \mathbb{P}(A_k).$$

Bemerkung zur Definition der stochastischen Unabhängigkeit

Gilt in Teil a) der vorigen Definition zusätzlich $\mathbb{P}(B) > 0$, so ist

$$A \perp\!\!\!\perp B \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Das bedeutet, dass die Bedingung B die Wahrscheinlichkeitsbewertung von A nicht ändert.