Kapitel 2
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Thorsten Dickhaus

Universität Bremen
Institut für Statistik

Mathematik 3: Stochastik
Universität Bremen, Fachbereich 03, SoSe 2025

Übersicht

Übersicht

Elementarwahrscheinlichkeiten

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

Aus der Additivität von $\mathbb{P}$ ergibt sich

$$\forall \emptyset \neq A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) =: \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega).$$

Es genügt also, die Elementarwahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(\{\omega\}), \omega \in \Omega$, anzugeben, wobei wegen Normiertheit von $\mathbb{P}$ gelten muss:

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion

Ist umgekehrt eine nicht-negative Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben mit der Eigenschaft

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1, \tag{1}$$

so induziert f ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_f$ auf 2^Ω vermittels

$$\mathbb{P}_f(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega), A \subseteq \Omega. \tag{2}$$

Definition:

Die Funktion f aus (1) *und* (2) *heißt Zähldichte oder Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\mathbb{P}_f$.*

Übersicht

Diskrete Gleichverteilung, Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum

Ein endlicher W'keitsraum $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$ mit $|\Omega| = n \in \mathbb{N}$ heißt Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum, falls $\mathbb{P}$ die Zähldichte $f_\mathbb{P}$ besitzt, für die gilt:

$$\forall \omega \in \Omega : f_\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{n}$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ heißt die diskrete Gleichverteilung auf Ω. Es gilt:

$$\forall A \in 2^\Omega : \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n} = \frac{\#\{\text{für } A \text{ günstige Ergebnisse}\}}{\#\{\text{alle mögliche Ergebnisse}\}}$$

Beispiel: Einfacher Würfelwurf

Angenommen, ein fairer Würfel wird geworfen und man interessiert sich für die W'keit, eine gerade Zahl zu würfeln.

Wir betrachten dazu den Grundraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sowie das Ereignis $A = \{2, 4, 6\}$. Die angenommene Fairness des Würfels führt zu einem Laplace'schen W'keitsraum und wir rechnen:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Übersicht

Additionsregel

Die Kombinatorik ist die Lehre von der Anzahlbestimmung bzw. vom Abzählen.

Lemma (Additionsregel)

Sei A eine endliche Menge und es gelte $A = A_1 \cup A_2$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dann ist $|A| = |A_1| + |A_2|$.

Multiplikationsregel (I)

Lemma (Multiplikationsregel)

Angenommen, aus k Mengen $A_1, \cdots, A_k$ werden geordnete k-Tupel $(m_1, \cdots, m_k)$ gebildet, deren j-te Komponente in A_j liegt $(m_j \in A_j, 1 \leq j \leq k)$.

Außerdem unterliegen die Komponenten der Einschränkung, dass für alle $2 \leq j \leq k$ die j-te Komponente m_j bei gegebenen $m_1, \ldots, m_{j-1}$ genau n_j verschiedene Elemente aus A_j annehmen kann, deren Auswahl, nicht aber deren Anzahl, gegebenenfalls von den vorherigen Komponenten $m_1, \ldots, m_{j-1}$ abhängt.

Sei A die Menge aller möglichen k-Tupel (unter diesen Voraussetzungen).

Multiplikationsregel (I)

Lemma (Multiplikationsregel)

Angenommen, aus k Mengen $A_1, \cdots, A_k$ werden geordnete k-Tupel $(m_1, \cdots, m_k)$ gebildet, deren j-te Komponente in A_j liegt $(m_j \in A_j, 1 \leq j \leq k)$.

Außerdem unterliegen die Komponenten der Einschränkung, dass für alle $2 \leq j \leq k$ die j-te Komponente m_j bei gegebenen $m_1, \ldots, m_{j-1}$ genau n_j verschiedene Elemente aus A_j annehmen kann, deren Auswahl, nicht aber deren Anzahl, gegebenenfalls von den vorherigen Komponenten $m_1, \ldots, m_{j-1}$ abhängt.

Sei A die Menge aller möglichen k-Tupel (unter diesen Voraussetzungen).

Multiplikationsregel (I)

Lemma (Multiplikationsregel)

Angenommen, aus k Mengen $A_1, \cdots, A_k$ werden geordnete k-Tupel $(m_1, \cdots, m_k)$ gebildet, deren j-te Komponente in A_j liegt $(m_j \in A_j, 1 \leq j \leq k)$.

Außerdem unterliegen die Komponenten der Einschränkung, dass für alle $2 \leq j \leq k$ die j-te Komponente m_j bei gegebenen $m_1, \ldots, m_{j-1}$ genau n_j verschiedene Elemente aus A_j annehmen kann, deren Auswahl, nicht aber deren Anzahl, gegebenenfalls von den vorherigen Komponenten $m_1, \ldots, m_{j-1}$ abhängt.

Sei A die Menge aller möglichen k-Tupel (unter diesen Voraussetzungen).

Multiplikationsregel (II)

Lemma (fortgesetzt)

Dann gilt:

$$|A| = \prod_{j=1}^{k} n_j = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Permutationen mit Wiederholung

Unter einer Permutation versteht man ein geordnetes Tupel.

Lemma (Anzahl möglicher k-Permutationen von n Objekten mit Wiederholung)

Sei M eine Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$, und sei

$$A := M^k = \{(m_1, \cdots, m_k) : m_j \in M \text{ für alle } 1 \leq j \leq k\}.$$

Dann ist

$$|A| =: \mathit{Pe}^*(n,k) = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k, \; k \geq 1.$$

Geburtstagsparadoxon

Gegeben sei eine Gruppe von k Personen, von denen keine am 29. Februar Geburtstag habe.

Es werde angenommen, alle anderen 365 Geburtstage seien gleich wahrscheinlich.

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der k Personen am gleichen Tag Geburtstag haben? Ab welchem Wert von k überschreitet diese Wahrscheinlichkeit den Wert $1/2$?

Lösung zum Geburtstagsparadoxon

$$\Omega = \{(m_1, \cdots, m_k) : 1 \le m_j \le 365 \ \forall 1 \le j \le k\} \Longrightarrow |\Omega| = 365^k$$

Sei $A := \{\text{Alle } k \text{ Geburtstage sind verschieden}\}$. Dann ist $|A| = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)$.

Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum mit Grundmenge Ω liefert

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(365 - j)}{365^k} \quad \text{und folglich}$$

$$\mathbb{P}\left(\complement A\right) = 1 - \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(365 - j)}{365^k} =: q_k.$$

Tabelle zum Geburtstagsparadoxon

k	q_k
2	$1/365 \approx 0.00274$
5	0.02714
10	0.11695
15	0.2529
20	0.41144
23	0.507297

Permutationen ohne Wiederholung

Lemma (Anzahl möglicher k-Permutationen von n Objekten ohne Wiederholung)

Sei M eine Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$, und sei

$$A = \{(m_1, \ldots, m_k) : m_j \in M \; \forall 1 \leq j \leq k,\; m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j\}.$$

Dann ist für $1 \leq k \leq n$:

$$|A| =: \mathit{Pe}(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Für $k = n$ gilt: $|A| = n!$

Kombinationen ohne Wiederholung (I)

Unter einer Kombination versteht man ein ungeordnetes Tupel (Reihenfolge spielt keine Rolle).

Sei M eine Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$, und sei

$$A = \{\{m_1, \cdots, m_k\} : m_j \in M \; \forall 1 \leq j \leq k, m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j\}.$$

Dieses A ist also die Menge der k-elementigen Teilmengen von M, für $1 \leq k \leq n$.

Kombinationen ohne Wiederholung (II)

Wir schreiben $C(n,k) := |A|$.

Jedes Element aus A kann auf $k!$ verschiedene Arten angeordnet werden. Daher ist

$$\begin{aligned} C(n,k)\cdot k! &= \text{Pe}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{und folglich} \\ C(n,k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Die Zahl $\binom{n}{k}$ heißt Binomialkoeffizient (sprich: ,,n über k”).

Beispiel: Urnenmodell (I)

Gegeben sei eine Urne mit n nummerierten Kugeln.
Wir ziehen gleichzeitig k (unterschiedliche) Kugeln aus dieser Urne. Damit ist

$$\Omega = \{\{m_1, \ldots, m_k\} : m_j \in \{1, \ldots, n\} \; \forall 1 \leq j \leq k, m_i \neq m_j \text{ für } i \neq j\}$$

und somit $|\Omega| = \binom{n}{k}$.

Nehmen wir als Modell den Laplace'schen W'keitsraum mit Grundraum Ω an, so gilt für alle $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

Beispiel: Urnenmodell (II)

Sei nun $A = \{\text{Kugel } j^* \text{ wird nicht gezogen}\}, 1 \leq j^* \leq n$. Dann ist

$$|A| = \binom{n-1}{k}$$

und damit

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k}^{-1} = \frac{(n-1)!k!(n-k)!}{k!(n-1-k)!n!} = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}.$$

Folglich ergibt sich für beliebiges $j^* \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\mathbb{P}(\{\text{Kugel } j^* \text{ wird gezogen}\}) = \mathbb{P}\left(\complement A\right) = \frac{k}{n}$$

Kombinationen mit Wiederholung (I)

Sei M eine Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$, und sei

$$A = \{\lfloor m_1, \ldots, m_k \rceil : m_j \in M \; \forall 1 \leq j \leq k\}.$$

Gesucht ist wieder die Mächtigkeit $|A|$ von A.

Kombinationen mit Wiederholung (II)

Zur Bestimmung von $|A|$ kodieren wir die Elemente von A als (geordnete) $(n+k-1)$-Tupel um. Zu diesen Zweck sei der Einfachheit halber $M = \{1, \ldots, n\}$.

Wir starten mit der Auswahlmöglichkeit „1" und notieren für ein Tupel $\omega = \lfloor m_1, \ldots, m_k \rceil \in A$ so viele „G" (gewählt) hintereinander, wie es m_j in ω mit $m_j = 1$ gibt. Danach notieren wir ein „N" (neues Element). Sodann notieren wir wiederum so oft ein „G" hintereinander, wie es m_j in ω mit $m_j = 2$ gibt, usw.

Ist etwa $n = 5, k = 3$ und $\omega = \lfloor 2\ 1\ 1 \rceil$, so führt das zum Notieren von G G N G N N N.

Kombinationen mit Wiederholung (II)

Zur Bestimmung von $|A|$ kodieren wir die Elemente von A als (geordnete) $(n+k-1)$-Tupel um. Zu diesen Zweck sei der Einfachheit halber $M = \{1, \ldots, n\}$.

Wir starten mit der Auswahlmöglichkeit ,,1" und notieren für ein Tupel $\omega = \lfloor m_1, \ldots, m_k \rceil \in A$ so viele ,,G" (gewählt) hintereinander, wie es m_j in ω mit $m_j = 1$ gibt. Danach notieren wir ein ,,N" (neues Element). Sodann notieren wir wiederum so oft ein ,,G" hintereinander, wie es m_j in ω mit $m_j = 2$ gibt, usw.

Ist etwa $n = 5, k = 3$ und $\omega = \lfloor 2\ 1\ 1 \rceil$, so führt das zum Notieren von G G N G N N N.

Kombinationen mit Wiederholung (II)

Zur Bestimmung von $|A|$ kodieren wir die Elemente von A als (geordnete) $(n+k-1)$-Tupel um. Zu diesen Zweck sei der Einfachheit halber $M = \{1, \ldots, n\}$.

Wir starten mit der Auswahlmöglichkeit ,,1" und notieren für ein Tupel $\omega = \lfloor m_1, \ldots, m_k \rceil \in A$ so viele ,,G" (gewählt) hintereinander, wie es m_j in ω mit $m_j = 1$ gibt. Danach notieren wir ein ,,N" (neues Element). Sodann notieren wir wiederum so oft ein ,,G" hintereinander, wie es m_j in ω mit $m_j = 2$ gibt, usw.

Ist etwa $n = 5, k = 3$ und $\omega = \lfloor 2\ 1\ 1 \rceil$, so führt das zum Notieren von G G N G N N N.

Kombinationen mit Wiederholung (III)

Offenbar gibt es sieben (allgemein: $n+k-1$) Positionen, auf die man die drei (allgemein: k) „G" platzieren kann. Wir haben es also mit einer Auswahl von k Plätzen aus $n+k-1$ Möglichkeiten zu tun.

Also ist

$$\begin{aligned} |A| &= C(n+k-1,k) = \binom{n+k-1}{k} \\ &= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} := C^*(n,k). \end{aligned}$$

Beispiel: Kombinationen mit Wiederholung (I)

Angenommen, Dr. D. wandert nach Thailand aus und eröffnet dort ein Eiscafé. Leider spricht er so schlecht Thailändisch, dass er die Bestellungen nicht versteht. Deswegen beschließt er, nur genau fünf Sorten Eis anzubieten und dass immer nur genau drei Kugeln Eis bestellt werden können (wobei natürlich Wiederholungen erlaubt sind, etwa ”Zwei Kugeln Erdbeer und eine Kugel Schokolade”).

Er wählt sodann bei jeder Bestellung rein zufällig (also gleichverteilt) aus den fünf Sorten drei Kugeln Eis aus.

Beispiel: Kombinationen mit Wiederholung (I)

Angenommen, Dr. D. wandert nach Thailand aus und eröffnet dort ein Eiscafé. Leider spricht er so schlecht Thailändisch, dass er die Bestellungen nicht versteht. Deswegen beschließt er, nur genau fünf Sorten Eis anzubieten und dass immer nur genau drei Kugeln Eis bestellt werden können (wobei natürlich Wiederholungen erlaubt sind, etwa ”Zwei Kugeln Erdbeer und eine Kugel Schokolade”).

Er wählt sodann bei jeder Bestellung rein zufällig (also gleichverteilt) aus den fünf Sorten drei Kugeln Eis aus.

Beispiel: Kombinationen mit Wiederholung (II)

Frage:

Wie groß ist unter diesen genannten Voraussetzungen die W'keit, dass Dr. D. einen Kundenwunsch richtig erfüllt?

Dabei spiele die Reihenfolge der gewählten Sorten keine Rolle, da das Eis im Becher verkauft wird und die drei Kugeln somit ohnehin nebeneinander zu liegen kommen.

Lösung:

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{1}{C^*(n=5,k=3)} = \frac{k!(n-1)!}{(n+k-1)!} = \frac{3!\cdot 4!}{7!} = \frac{1}{35} \approx 2{,}86\%.$$

Beispiel: Kombinationen mit Wiederholung (II)

Frage:

Wie groß ist unter diesen genannten Voraussetzungen die W'keit, dass Dr. D. einen Kundenwunsch richtig erfüllt?

Dabei spiele die Reihenfolge der gewählten Sorten keine Rolle, da das Eis im Becher verkauft wird und die drei Kugeln somit ohnehin nebeneinander zu liegen kommen.

Lösung:

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{1}{C^*(n=5, k=3)} = \frac{k!(n-1)!}{(n+k-1)!} = \frac{3! \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{35} \approx 2{,}86\%.$$

Schema zur Kombinatorik

Aus n Elementen werden genau k Elemente ausgewählt.

Reihenfolge	Wiederholung	
	ja	nein
berücksichtigt	$\mathrm{Pe}^*(n,k) = n^k$	$\mathrm{Pe}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
unberücksichtigt	$C^*(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$	$C(n,k) = \binom{n}{k}$

Übersicht

Zufallsvariable (I)

Eine Zufallsvariable beschreibt einen Teilaspekt eines Zufallsexperiments.

Mathematisch gesehen ist eine (reellwertige) Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Wir bezeichnen die Menge aller Werte, die X annehmen kann, mit

$$\mathcal{X} := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}.$$

Zufallsvariable (I)

Eine Zufallsvariable beschreibt einen Teilaspekt eines Zufallsexperiments.

Mathematisch gesehen ist eine (reellwertige) Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Wir bezeichnen die Menge aller Werte, die X annehmen kann, mit

$$\mathcal{X} := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}.$$

Zufallsvariable (I)

Eine Zufallsvariable beschreibt einen Teilaspekt eines Zufallsexperiments.

Mathematisch gesehen ist eine (reellwertige) Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Wir bezeichnen die Menge aller Werte, die X annehmen kann, mit

$$\mathcal{X} := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}.$$

Zufallsvariable (II)

Lemma:

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable. Dann kann die Kardinalität der Menge $\mathcal{X} = X(\Omega)$ die Kardinalität der Menge Ω niemals übersteigen.

Ist also Ω höchstens abzählbar, so ist auch $\mathcal{X}$ höchstens abzählbar.

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariable

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter W'keitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable.

Dann ist für jedes $x \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} f_X(x) &:= \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) = x} f_{\mathbb{P}}(\omega), \end{aligned}$$

wobei $f_{\mathbb{P}}$ die zu $\mathbb{P}$ gehörige W'keitsfunktion ist.

Das durch die W'keitsfunktion f_X induzierte W'maß auf $\mathcal{X}$ heißt die Verteilung von X.

Beispiel: Augensumme beim doppelten Würfelwurf (I)

Sei $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2 = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, und $\mathbb{P}$ die diskrete Gleichverteilung auf Ω.

Betrachte die Zufallsvariable X, die gegeben ist durch $X((i,j)) = i + j$ für $(i,j) \in \Omega$.

Dann ist $\mathcal{X} = \{2, 3, \ldots, 12\}$ und wir können die Zähldichte von X wie folgt berechnen:

Beispiel: Augensumme beim doppelten Würfelwurf (II)

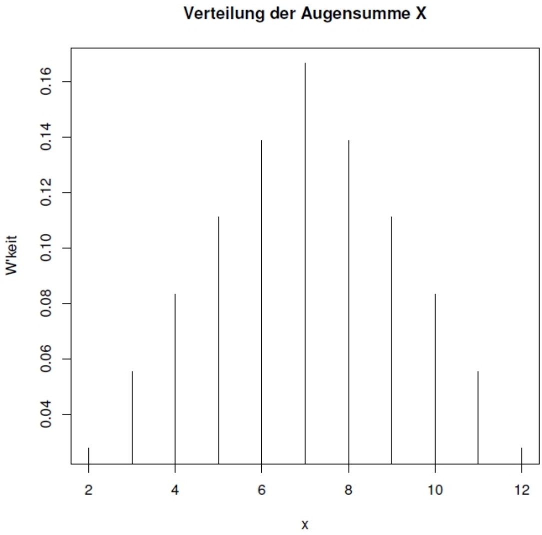
$$
\begin{aligned}
f_X(2) &= \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36} \\
f_X(3) &= \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\
\ldots & \\
f_X(7) &= \mathbb{P}(X=7) = \mathbb{P}(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) \\
&= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\
\ldots & \\
f_X(11) &= \mathbb{P}(X=11) = \mathbb{P}(\{(5,6),(6,5)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\
f_X(12) &= \mathbb{P}(X=12) = \mathbb{P}(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Augensumme beim doppelten Würfelwurf (III)

Allgemein ist die Verteilung der Augensumme X beim doppelten Würfelwurf gegeben durch

$$f_X(x) = \frac{6 - |x - 7|}{36}, \; x \in \mathcal{X} = \{2, 3, \ldots, 12\}.$$

Wir können eine solche diskrete Verteilung durch ein Stabdiagramm visualisieren.


Verteilung der Augensumme X
W'keit
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
2
4
6
8
10
12
x

Beispiel: Augensumme beim doppelten Würfelwurf (IV)

Offensichtlich ist die Verteilung von X hier keine Gleichverteilung, obwohl wir mit einer Gleichverteilung auf Ω gestartet sind.

Man kann also Zufallsvariablen dazu benutzen, um aus einer gegebenen diskreten W'keitsverteilung $\mathbb{P}$ eine neue diskrete W'keitsverteilung zu generieren, deren Zähldichte ggfs. völlig anders aussieht als $f_{\mathbb{P}}$.

Man spricht dabei auch von einer Dichte-Transformation.

Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable

Sei X eine Zufallsvariable auf einem W'keitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$.

Dann heißt die Funktion F_X, die gegeben ist durch

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \text{ für } x \in \mathcal{X},$$

die Verteilungsfunktion von X.

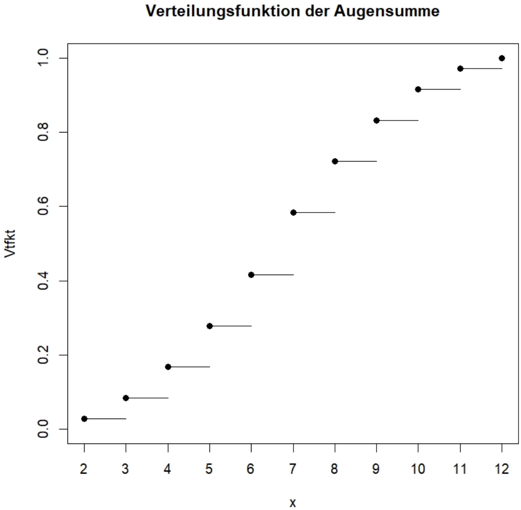
Die Verteilungsfunktion von X legt die Verteilung von X eineindeutig fest.

Die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable

Falls X reellwertig und diskret verteilt ist mit Zähldichte f_X, so lässt sich die Verteilungsfunktion F_X von X aus f_X berechnen vermittels kumulativer Summenbildung:

$$\forall x \in \mathcal{X} : F_X(x) = \sum_{y \in \mathcal{X} : y \leq x} f_X(y)$$

Jede Verteilungsfunktion wächst monoton von Null nach Eins.


Verteilungsfunktion der Augensumme
Vtfkt
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
x

Übersicht

Bernoulli-Experiment und -Verteilung (I)

Sei $p \in [0, 1]$ eine vorgegebene Zahl.

Wir betrachten ein Zufallsexperiment, dessen Ergebnis entweder ein ”Treffer” oder ein ”Nicht-Treffer” sein kann. Dabei sei die Treffer-W’keit gleich p und damit die W’keit für einen ”Nicht-Treffer” gleich $1 - p$.

Wir kodieren den ”Treffer” mit der Zahl 1 und den ”Nicht-Treffer” mit der Zahl 0 und modellieren das Experiment wie folgt:

Bernoulli-Experiment und -Verteilung (II)

$\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$,
$\mathbb{P}$ wird induziert durch die Zähldichte $f_{\mathbb{P}}(\cdot|p)$ mit

$$f_{\mathbb{P}}(\omega|p) = p^{\omega} \cdot (1-p)^{1-\omega} = \begin{cases} p, & \text{falls } \omega = 1, \\ 1-p, & \text{falls } \omega = 0. \end{cases}$$

Wir nennen ein Experiment von diesem Typ ein
Bernoulli-Experiment und das W'maß $\mathbb{P}$ die
Bernoulli-Verteilung mit Parameter p.

Bernoulli'sches Versuchsschema

Sei nun zusätzlich eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

Wir betrachten die Situation, dass das Bernoulli-Experiment mit Treffer-W'keit p n-mal unabhängig voneinander durchgeführt wird.

Dieses Zufallsexperiment wird als ein Bernoulli'sches Versuchsschema bezeichnet.

Modellierung des Bernoulli'schen Versuchsschemas

$\Omega = \{0,1\}^n$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$,
$\mathbb{P}$ wird induziert durch die Zähldichte $f_{\mathbb{P}}(\cdot|n,p)$ mit:

$$f_{\mathbb{P}}(\omega|n,p) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} \cdot (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i}$$

Beispielsweise ist für $n = 5$ und $\omega = (1,0,0,1,1)$:

$$f_{\mathbb{P}}(\omega|n=5,p) = p^3 \cdot (1-p)^2$$

Die Produktgestalt der Zähldichte folgt aus der Unabhängigkeit der Wiederholungen im Bernoulli'schen Versuchsschema.

Binomialverteilung (I)

Unter einem Bernoulli'schen Versuchsschema mit Parametern n und p betrachten wir die Zufallsvariable X, die gegeben ist durch $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ für $\omega \in \Omega = \{0, 1\}^n$.

X beschreibt also die zufällige Anzahl an Treffern im Bernoulli'schen Versuchsschema.

Klarerweise ist der Wertebereich von X gegeben durch $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Binomialverteilung (II)

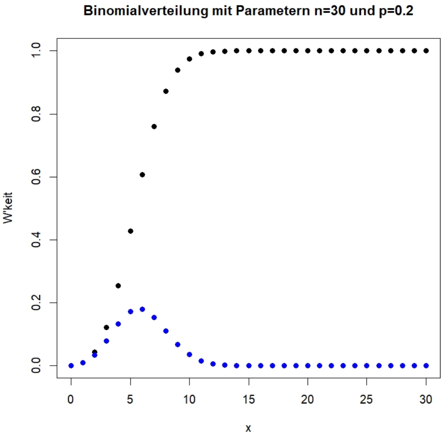
Die Verteilung von X heißt
Binomialverteilung mit Parametern n und p,
in Zeichen: $\mathrm{Bin}(n, p)$.

Ihre Zähldichte ist gegeben durch

$$f_X(x|n,p) = \mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

für $x \in \mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Dies folgt daraus, dass es $\binom{n}{x}$ verschiedene Möglichkeiten gibt, die x Treffer auf die n Versuche zu verteilen.



Blau: Zähldichte von Bin$(n = 30, p = 0.2)$

Schwarz: Verteilungsfunktion von Bin$(n = 30, p = 0.2)$

Übersicht

Herleitung der Poisson-Verteilung (I)

Wir betrachten die Binomialverteilung mit Parametern n und p und nehmen an, dass n gegen unendlich strebt und gleichzeitig $p = p(n)$ gegen Null strebt.

Diese beiden Asymptotiken seien derart aneinander gekoppelt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $n \cdot p = \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Mit anderen Worten ist also $p = p(n) = \lambda/n$.

Herleitung der Poisson-Verteilung (II)

Satz:

Bezeichne $f_{Bin}(\cdot|n,p)$ *die Zähldichte der Binomialverteilung mit Parametern* n *und* p.

Dann gilt für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$*:*

$$\lim_{n\to\infty} f_{Bin}(k|n,p=\lambda/n) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$$

Poisson-Verteilung (I)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine vorgegebene Zahl.

Die Funktion

$$f_{\text{Poisson}}(\cdot|\lambda) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_{>0}$$
$$k \mapsto f_{\text{Poisson}}(k|\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

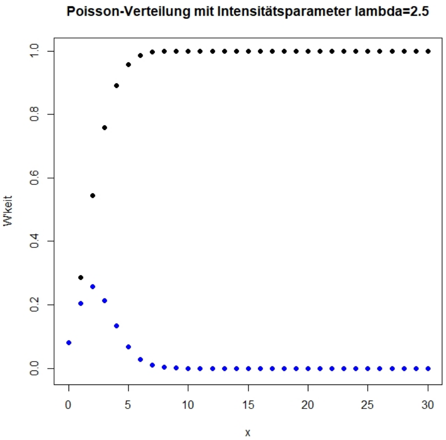
ist eine Zähldichte auf $\Omega = \mathbb{N}_0$.

Die von $f_{\text{Poisson}}(\cdot|\lambda)$ induzierte W'keitsverteilung auf $\mathbb{N}_0$ heißt die Poisson-Verteilung mit Intensitätsparameter λ.

Poisson-Verteilung (II)

Die Poisson-Verteilung ist ein Modell für eine zufällige Anzahl an eintretenden Zielereignissen innerhalb eines festgelegten Zählrahmens, wobei die Eintrittsw'keit beim Einzelereignis klein ist ("seltene Ereignisse").

Zum Beispiel kann in der Epidemiologie die zufällige Anzahl an Neuerkrankungen innerhalb einer festgelegten Zeitspanne und innerhalb einer festgelegten Zielpopulation bei seltenen Krankheiten mit Hilfe einer Poisson-Verteilung modelliert werden.



Blau: Zähldichte von Poisson$(\lambda = 2.5)$

Schwarz: Verteilungsfunktion von Poisson$(\lambda = 2.5)$

Übersicht

Herleitung der geometrischen Verteilung (I)

Wir denken uns ein Bernoulli'sches Versuchsschema mit (prinzipiell) beliebig vielen Versuchen.

Somit ist $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} : \omega_i \in \{0,1\}\}$.

Für jeden einzelnen Versuch i ist die W'keit, $\omega_i = 1$ zu beobachten, gleich $p \in (0,1)$. Außerdem sind alle Versuche unabhängig voneinander.

Sei unter diesem Modell die Zufallsvariable X gegeben als die (zufällige) Anzahl erfolgloser Versuche vor dem ersten "Treffer".

Mathematisch formalisiert ist

$$X(\omega) = \min\{i : \omega_i = 1\} - 1.$$

Herleitung der geometrischen Verteilung (II)

Klarerweise ist hier $\mathcal{X} = X(\Omega) = \mathbb{N}_0$.

Wir berechnen die Zähldichte $f_X(\cdot|p)$ von X wie folgt.

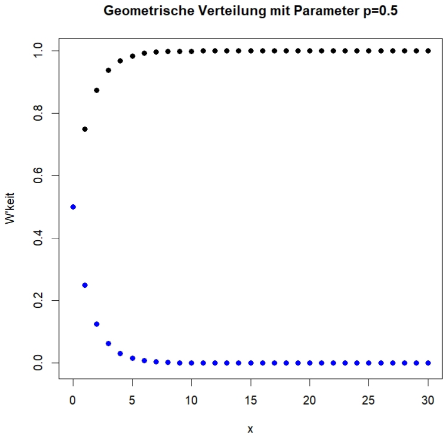
$$\begin{aligned}
f_X(0|p) &= \mathbb{P}(X = 0) = p \quad \text{(gleich zu Beginn ein Treffer)} \\
f_X(1|p) &= \mathbb{P}(X = 1) = (1-p)\cdot p \quad \text{(erst ein Nicht-Treffer, dann ein Treffer)} \\
f_X(2|p) &= \mathbb{P}(X = 2) = (1-p)^2\cdot p \quad \text{(erst zwei Nicht-Treffer, dann ein Treffer)} \\
&\ldots \\
f_X(x|p) &= \mathbb{P}(X = x) = (1-p)^x\cdot p,\ x \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

Geometrische Verteilung

Die Verteilung dieser Zufallsvariable X heißt geometrische Verteilung mit Parameter p, in Zeichen: Geo(p).

Der Name kommt daher, dass die geometrische Summenformel benutzt wird, um nachzuweisen, dass die Zähldichte sich zu Eins summiert:

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x|p) &= p \cdot \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x \\ &= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1\end{aligned}$$



Blau: Zähldichte von Geo$(p = 0.5)$
Schwarz: Verteilungsfunktion von Geo$(p = 0.5)$

Verallgemeinerung der geometrischen Verteilung

Fragen wir uns nun nach der W'keit, dass der r-te Treffer im j-ten Versuch auftritt, wobei $r \in \mathbb{N}$ und $j \geq r$ ist.

Dazu müssen unter den ersten $j-1$ Versuchen genau $r-1$ Treffer und genau $j-r$ Nicht-Treffer sein, und zusätzlich muss der j-te Versuch einen Treffer liefern.

Da die Anzahl der Möglichkeiten, die $r-1$ Treffer auf die ersten $j-1$ Versuche zu verteilen, gleich $\binom{j-1}{r-1}$ ist, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\binom{j-1}{r-1} \cdot (1-p)^{j-r} \cdot p^r.$$

(vgl. Kapitel 23 in Henze (2021): Stochastik für Einsteiger, 13. Auflage, Springer-Verlag)