Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Übungsblatt 3 (Abgabe am 27.11.2023, 12:15 Uhr)

Übung 3.1 (8 Punkte)

(a) Wendet den aus der Vorlesung bekannten optimalen Greedy Algorithmus für das Interval Scheduling Problem auf die folgende Instanz an, um einen optimalen Plan zu finden:

Prozess	1	2	3	4	5	6	7	8
Startzeit	2	4	8	7	3	6	1	2
Endzeit	4	7	10	11	6	9	3	4

(b) Gegeben ist eine Instanz des Interval Scheduling Problems. Betrachtet die folgende Greedy-Strategy: Wähle den Prozess mit der spätesten Startzeit unter den Prozessen, die zu allen bereits gewählten Prozessen kompatibel sind. Wiederhole, bis kein Prozess mehr existiert, der zu allen bereits gewählten Prozessen kompatibel ist. Zeigt, dass diese Strategie einen optimalen Plan für das Interval Scheduling Problem berechnet.

(c) Betrachtet die gewichtete Variante von Interval Scheduling. In diesem Problem sind zusätzlich Gewichte w_i für jeden Prozess $i \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Die Aufgabe ist es, eine Teilmenge S von paarweise kompatiblen Prozessen zu finden, so dass $w(S) := \sum_{i \in S} w_i$ maximiert wird. Zeigt oder widerlegt die folgende Aussage: Der aus der Vorlesung bekannte Algorithmus (Auswahlstrategie „früheste Beendigungszeit") ist optimal für das gewichtete Interval Scheduling Problem.

Übung 3.2 (6 Punkte)

Gebt einen Algorithmus an, der für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ entscheidet, ob dieser bipartit ist. Die Laufzeit des Algorithmus soll linear in der Eingabegröße des Graphen ($\mathcal{O}(|V| + |E|)$) sein. Zeigt, dass Euer Algorithmus korrekt ist und die gewünschte Laufzeit erzielt.

Übung 3.3 (6 Punkte)

Ein ungerichteter Graph heißt *Eulersch*, wenn es einen geschlossenen Weg gibt, der jede Kante genau einmal besucht. Diesen geschlossenen Weg bezeichnen wir auch als *Eulertour*. Analog dazu nennen wir einen Graphen *Hamiltonisch*, wenn er einen Kreis enthält, der jeden Knoten genau einmal besucht. Diesen nennen wir auch *Hamiltonkreis*.

Ihr seid beauftragt worden, Straßennetze für drei (unabhängige) Stadtteile zu planen. Diese werden als einfache, ungerichtete, zusammenhängende Graphen modelliert. Dabei repräsentieren Kanten die Straßen und Knoten die Kreuzungen der Straßen. Der Stadtrat hat konkrete Pläne, wie viele Kreuzungen die Stadtteile haben sollen. Ferner wird auch genau vorgegeben, wie viele Straßen an eine Kreuzung angebunden werden sollen (die Knotengrade sind auch vorgegeben).

Findet für die folgenden Stadtteile jeweils einen Graphen mit der vorgegebenen Anzahl an Knoten mit den angegebenen Graden, oder begründet, warum der Plan nicht umsetzbar ist.

- Erster Stadtteil: 5 Knoten mit Graden $2, 2, 2, 4, 4$.
- Zweiter Stadtteil: 4 Knoten mit Graden $1, 1, 2, 4$.
- Dritter Stadtteil: 6 Knoten mit Graden $2, 2, 3, 3, 3, 3$.
- Vierter Stadtteil: 7 Knoten mit Graden $1, 1, 3, 3, 3, 5, 5$

Gebt für eure Entwürfe ebenfalls an, ob diese eine Eulertour oder einen Hamiltonkreis zulassen und zeichnet diese gegebenenfalls ein.