Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Übungsblatt 4 (Abgabe am 11.12.2023, 12:15 Uhr)

Übung 4.1 (7 Punkte)

Gegeben sei ein Binary Heap repräsentiert durch ein Array genau wie in der Vorlesung. Wie in den Beispielen aus der Vorlesung gehen wir davon aus, dass der erste Index des Arrays 1 ist (und *nicht* 0). Gebt Pseudocode für die Heap-Operationen `Delete` und `Insert` an.

Für die `Insert`-Operation könnt ihr davon ausgehen, dass immer ein freier Eintrag im Array zur Verfügung steht und das neue Element eingefügt werden kann ohne das Array zu vergrößern. Beide Methoden bekommen als Eingabe das Array und die aktuelle Anzahl der Elemente im Heap. Für die `Insert`-Operation erhaltet ihr zusätzlich eine natürliche Zahl, die eingefügt werden soll. Für die `Delete`-Operation erhaltet ihr zusätzlich die Position des zu löschenden Elements im Array.

Begründet für beide Methoden kurz, dass nach dem Ausführen wieder ein Binary Heap vorliegt, und die gewünschte Laufzeit ($\mathcal{O}(\log n)$ für die maximale Heap Kapazität n) erzielt wird.

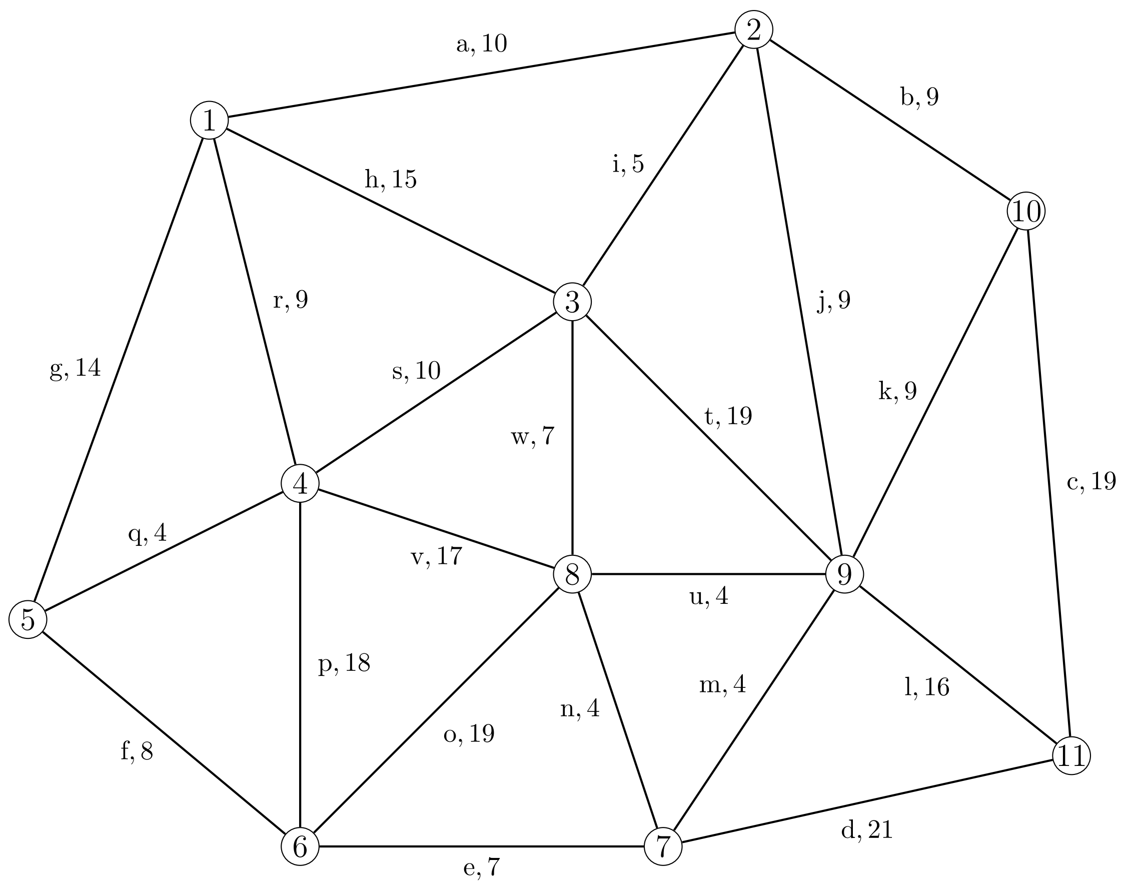
Übung 4.2 (7 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kostenfunktion $c\colon E \to \mathbb{R}$ mit $c(e) \geq 0$ für alle $e \in E$. Seien T_1 und T_2 MSTs von G mit $T_1 \neq T_2$. Zeigt, dass es für jede Kante $e_1 \in T_1 \setminus T_2$ eine Kante $e_2 \in T_2 \setminus T_1$ gibt, so dass $T_3 = (T_1 \setminus \{e_1\}) \cup \{e_2\}$ ein MST von G ist.

Übung 4.3 (6 Punkte)

Führt die Algorithmen von Kruskal und Prim (mit Startknoten $s = 1$) für den unten stehenden Graphen durch. Aus eurer Lösung sollte insbesondere hervorgehen in welcher Reihenfolge die Kanten zum hier entstehenden minimalen aufspannenden Baum hinzugefügt werden.

Beispiel Notation: Die Kante a verbindet die Knoten 1 und 2, und hat das Gewicht 10.



a, 10
b, 9
c, 19
d, 21
e, 7
f, 8
g, 14
h, 15
i, 5
j, 9
k, 9
l, 16
m, 4
n, 4
o, 19
p, 18
q, 4
r, 9
s, 10
t, 19
u, 4
v, 17
w, 7
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11