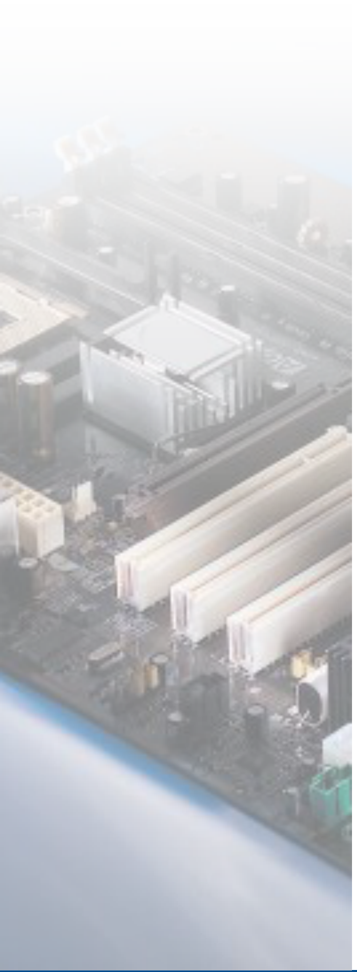


Technische Informatik 1

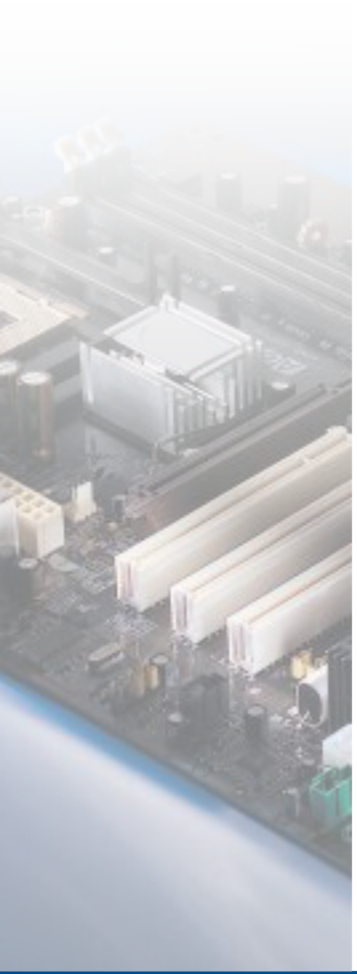
Prof. Dr. Rolf Drechsler

Christina Plump

Überblick

Teil 1: Der Rechneraufbau (Kapitel 2-5)	Teil 2: Der Funktionalitätsaufbau (Kapitel 6-12)

• Rechner im Überblick
• Pipelining
• Speicher
• Parallelverarbeitung
	• Kodierung
	• Grundbegriffe, Boolesche Funktionen
	• **Darstellungsmöglichkeiten**
	  • **Zweistufige Logiksynthese**
	  • Binäre Entscheidungsdiagramme
	• Schaltkreise, Synthese, spezielle Schaltkreise



Kapitel 8: Zweistufige Logiksynthese

PLAs und zweistufige Logiksynthese

Implikanten und Primimplikanten

Algorithmus zur Berechnung eines Minimalpolynoms

Lernziele

- Aufbau von zweistufigen PLAs kennen und verstehen
- Für eine gegebene Boolesche Funktion ein PLA aufbauen und die Belegungsflüsse nachvollziehen
- Kosten von Monomen und Polynomen kennen (primär und sekundär) und bestimmen können
- Problem der Logikminimierung kennen und verstehen
- Veranschaulichung von Booleschen Funktionen an n-dimensionalen Würfeln verstehen und anwenden können
- Problem der Logikminimierung am Prinzip der Würfel verstehen

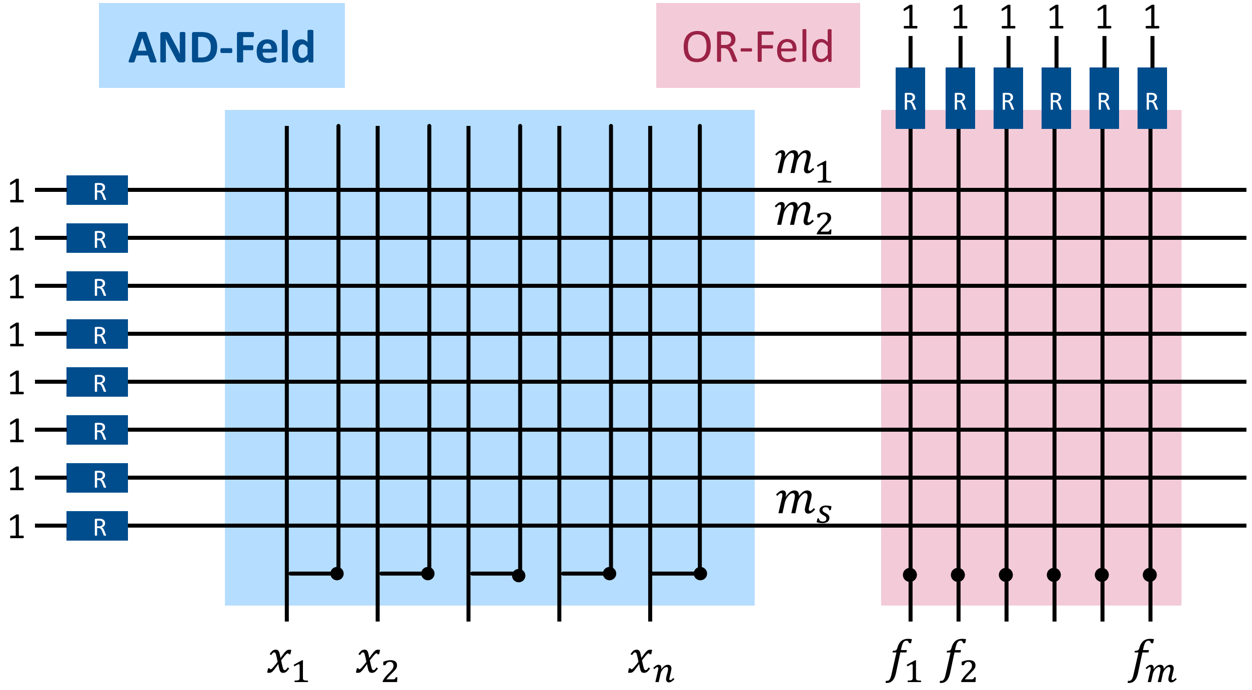
Verfügbare Technologien

Nurlesespeicher	Read Only Memory (ROM) Programmable ROM (PROM) Erasable PROM (EPROM), ...
Zweistufige Realisierungen	Programmierbare Logische Felder (PLA)
Mehrstufige Realisierungen	Gate-Arrays- und Sea-of-Gates Entwurf Field Programmable Logic Arrays (FPGA), ASIC

Programmierbare logische Felder (PLA)

Zweistufige Darstellung zur Realisierung von Booleschen Polynomen der Form
$f_i = m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{ik}, m_{iq} \in \{m_1, \dots, m_s\}$

- Variablen
- Monome im AND-Feld
  - Enthält Monom m_j k Literale, so werden k Transistoren in der entsprechenden Zeile des AND-Feldes benötigt
- Polynome im OR-Feld
  - Besteht die Beschreibung von Funktion f_t aus p Monomen, so benötigt man p Transistoren in der entsprechenden Spalte des OR-Feldes



Fläche: $(m + 2n) \cdot s$
Laufzeit: konstant (ohne Berücksichtigung der Kapazität)

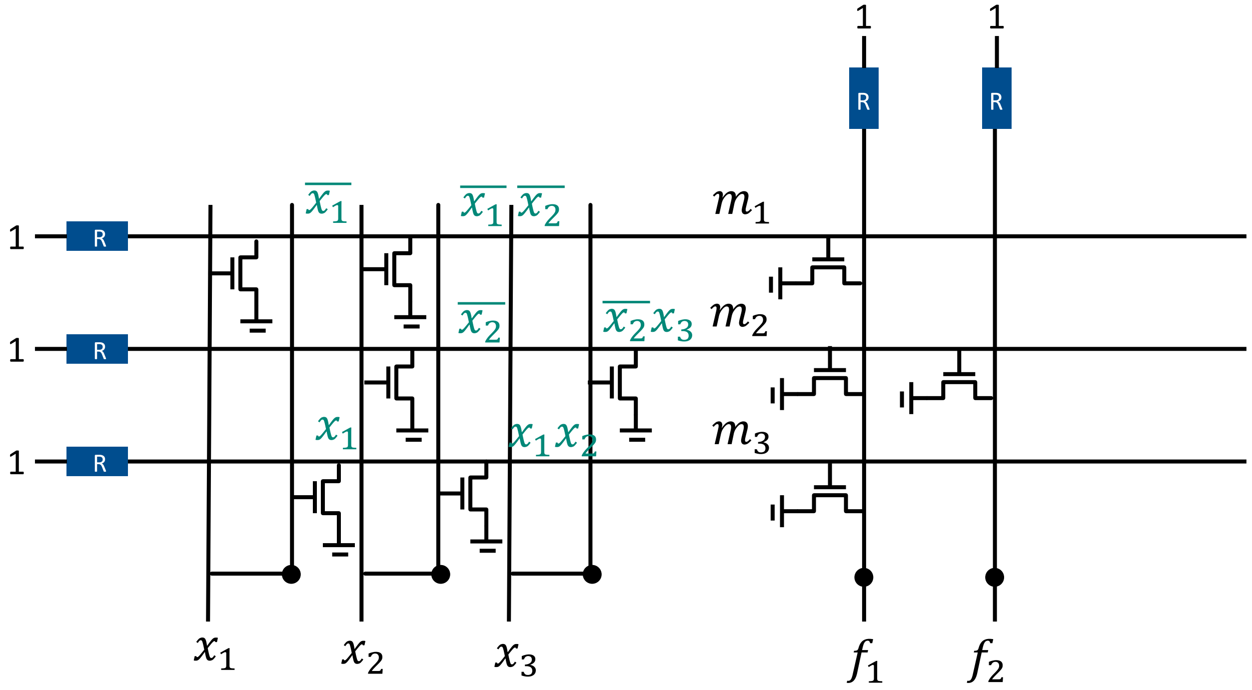
Programmierbare Logische Felder - Beispiel

Annahme:

- $f: \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}^2$
- $f_1(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_2}x_3 + x_1x_2$
- $f_2(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}x_3$

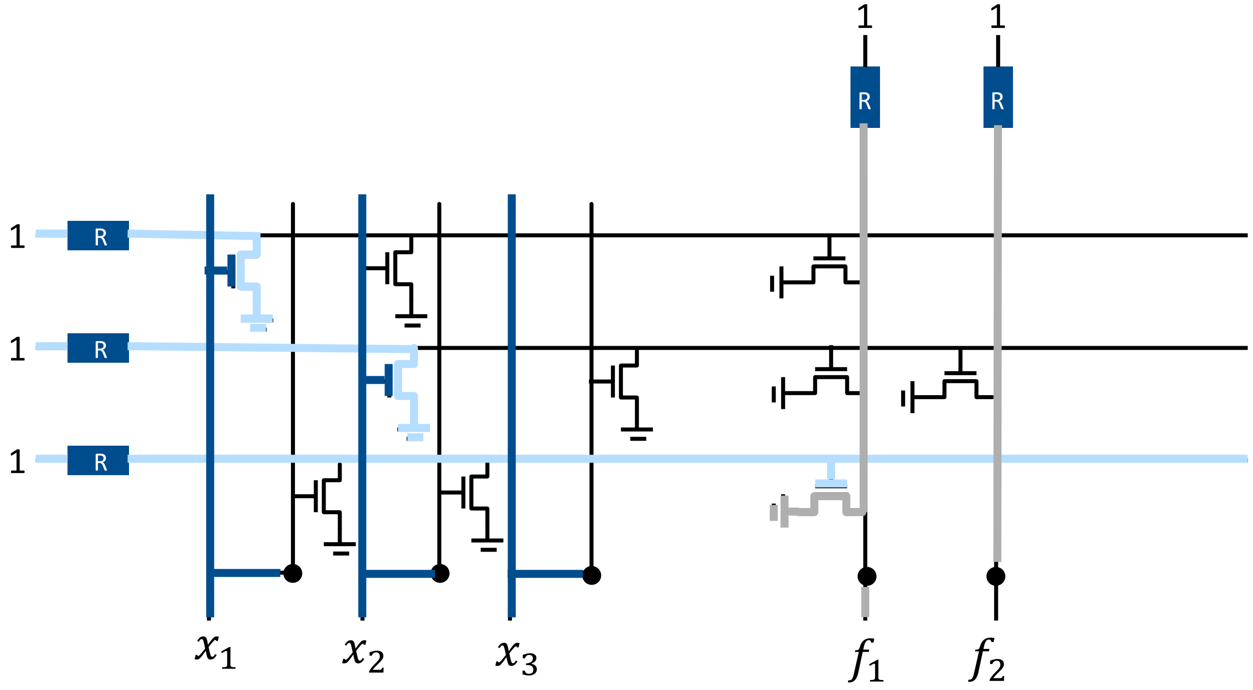
Vorgehen:

- Drei anliegende Variablen x_1, x_2, x_3
- Drei Monome
  - $m_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}$
  - $m_2 = \overline{x_2}x_3$
  - $m_3 = x_1x_2$
- Zwei Polynome f_1, f_2



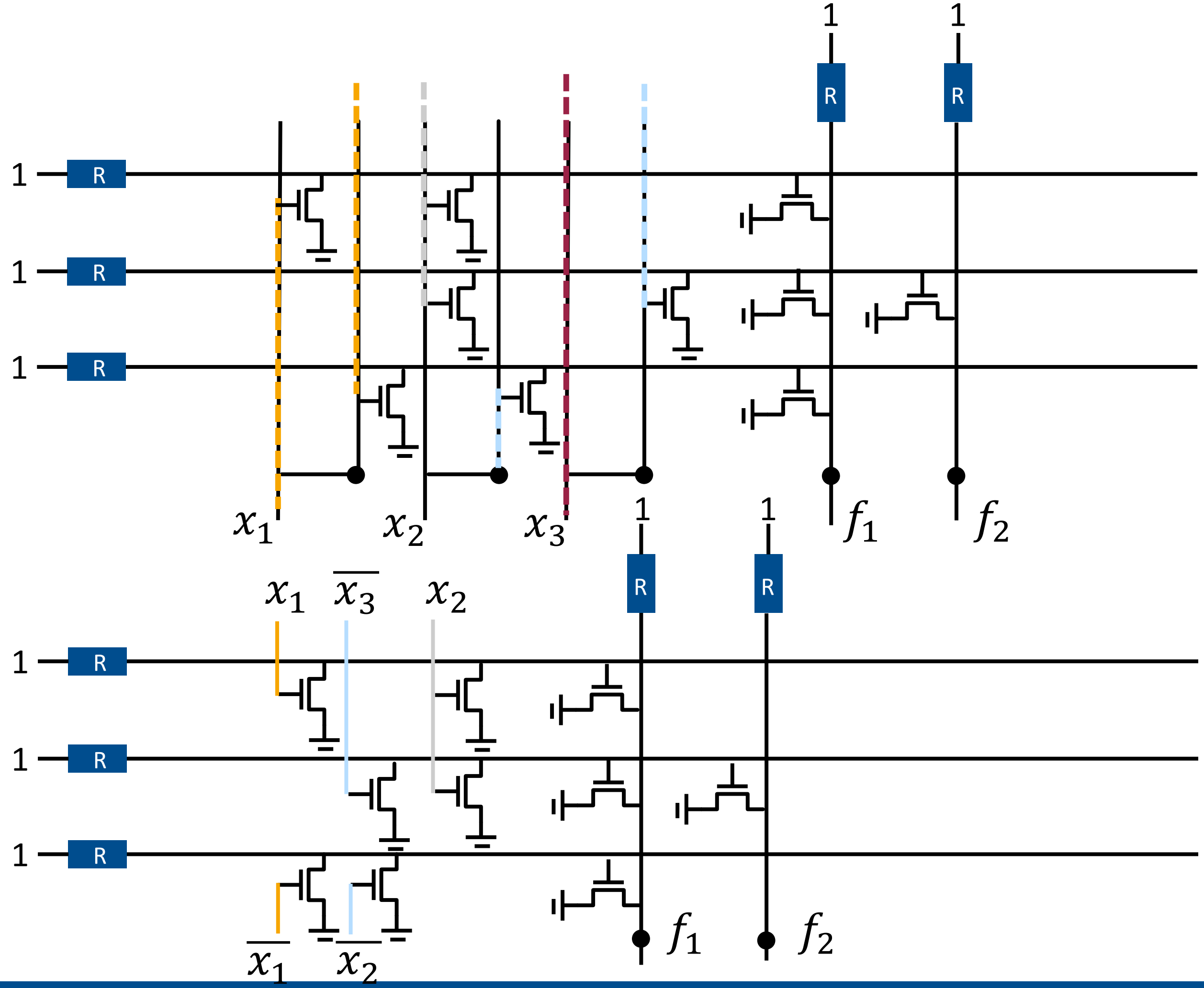
Programmierbare Logische Felder – Beispiel (2)

- Belegung: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$
  - $m_1 = 0$
  - $m_2 = 0$
  - $m_3 = 1$
  - $f_1 = 1$
  - $f_2 = 0$



Programmierbare Logische Felder – Beispiel (3)

- Platzeinsparung durch Faltung
  - Streichen überflüssiger Leitungen
  - Verlegen von Leitungen in Freiräume



Je dünner die Felder belegt sind, desto günstiger die Faltung!

Kosten von Monomen

Definition (Kosten von Monomen) :
Sei $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r$, dann entsprechen die Kosten $|q|$ von q der Anzahl der zur Realisierung von q benötigten Transistoren im PLA, also gilt: $|q| \coloneqq r$.

Kosten von Polynomen

Vereinbarung zur Schreibweise:
Für $p_1, p_2, \ldots, p_m$ Polynome bezeichnet $M(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ die Menge der in den Polynomen vorkommenden Monome.

Definition (primäre Kosten) :
Sei $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ eine Menge an Polynomen. Die primären Kosten $cost_1(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ entsprechen der Anzahl der im PLA verwendeten Zeilen, um $p_1, p_2, \ldots, p_m$ zu realisieren, also gilt: $cost_1(p_1, p_2, \ldots, p_m) = |M(p_1, p_2, \ldots, p_m)|$.

Definition (sekundäre Kosten) :
Sei $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ eine Menge an Polynomen. Die sekundären Kosten $cost_2(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ entsprechen der Anzahl der im PLA verwendeten Transistoren, um $p_1, p_2, \ldots, p_m$ zu realisieren, also gilt:
$cost_2(p_1, p_2, \ldots, p_m) = \sum_{q \in M(p_1, \ldots, p_m)} |q| + \sum_{i=1}^{m} |M(p_i)|$.

Das Problem der 2-stufigen Logikminimierung

Gegeben:

Eine Boolesche Funktion $f = (f_1, \ldots, fm) \in \mathcal{B}_{n,m}$ in n Variablen und m Ausgängen in Form

- Einer Tabelle der Dimension $(n+m) \cdot 2^n$
- Einer Menge von m Polynomen $\{p_1, \cdots, p_m\}$ mit $\psi(p_i) = f_i$

Gesucht:

Eine Menge von Polynomen $\{g_1, \cdots, g_m\}$ mit den Eigenschaften

(1) $\psi(g_i) = f_i$

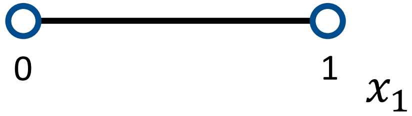
(2) $cost_1(g_1, \ldots, g_m)$ ist minimal unter Bed. (1)

(3) $cost_1(g_1, \ldots, g_m)$ ist minimal unter Bed. (1) und (2)

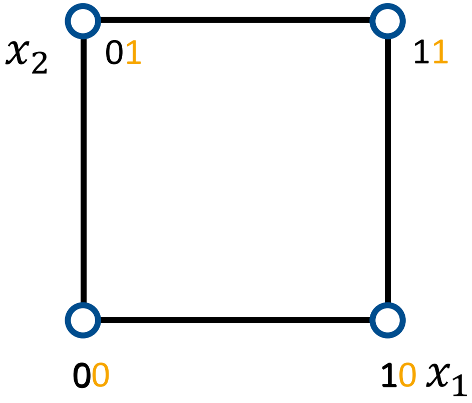
Im Folgenden wollen wir der Einfachheit halber nur vollständig definierte Boolesche Funktionen (in n Variablen) mit genau einem Ausgang betrachten.

Veranschaulichung von Monomen und Polynomen

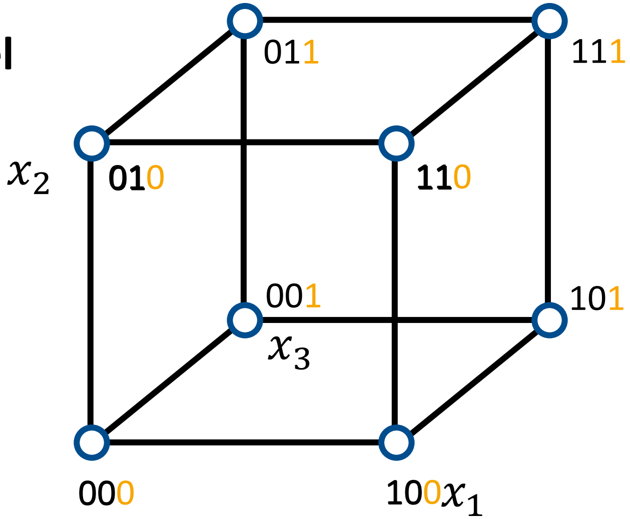
Eine Variable: ein-dim. Würfel



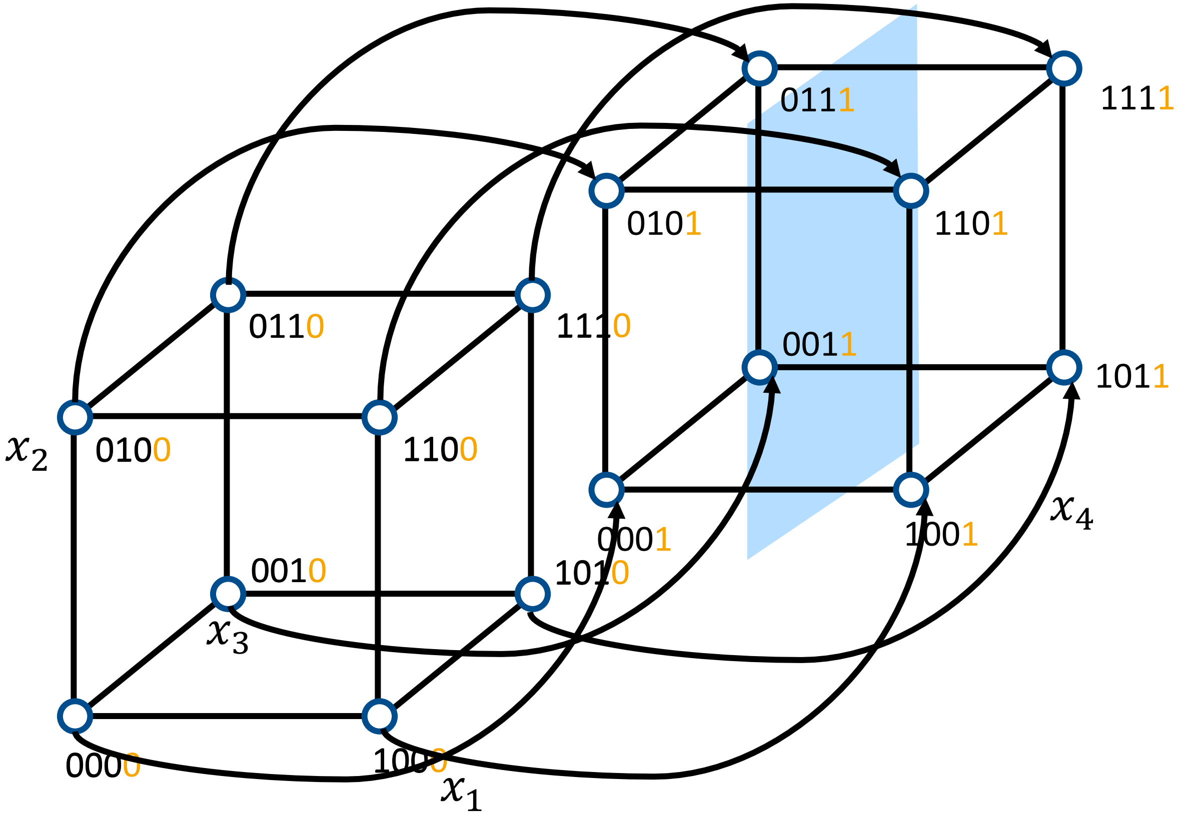
Zwei Variablen: zwei-dim. Würfel



Drei Variablen: drei-dim. Würfel



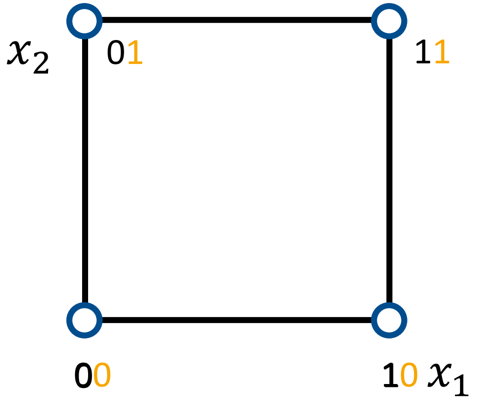
Vier Variablen: vier-dim. Würfel



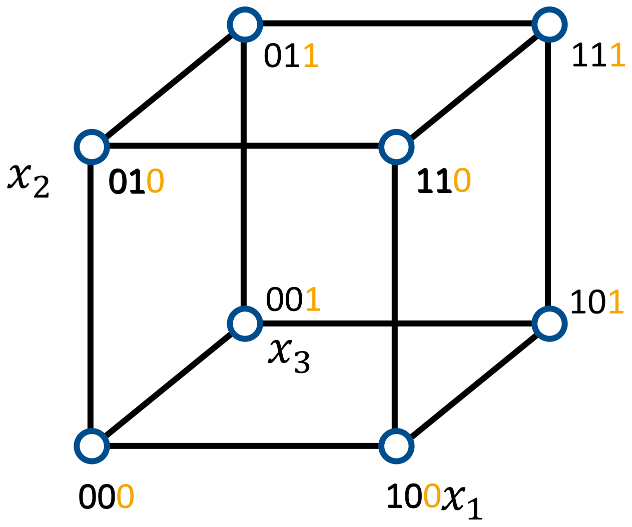
Veranschaulichung von Monomen und Polynomen

Eine Variable: ein-dim. Würfel

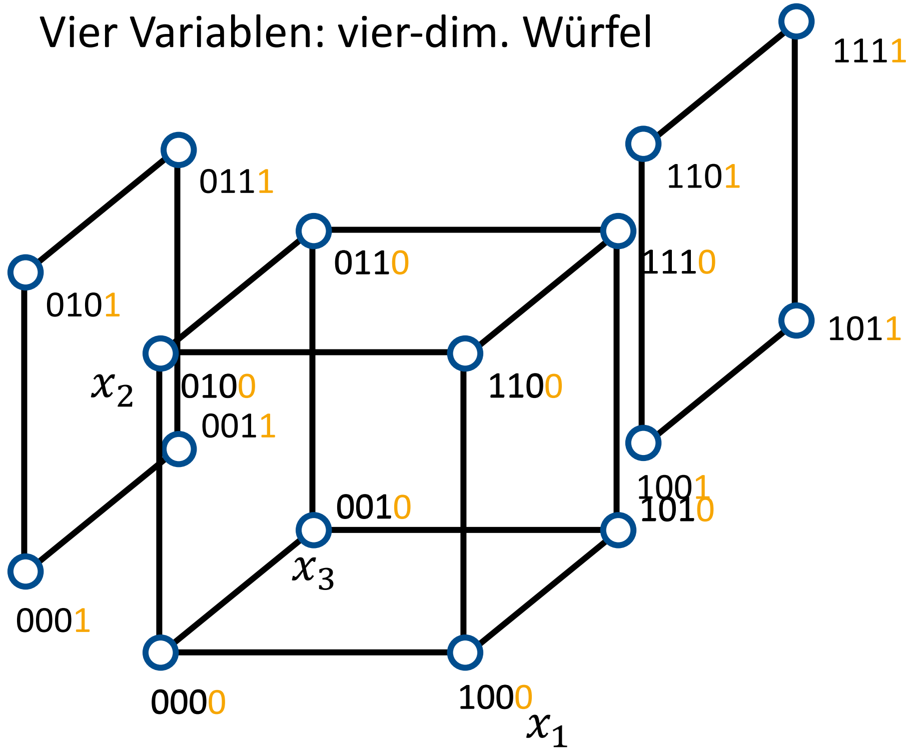
Zwei Variablen: zwei-dim. Würfel



Drei Variablen: drei-dim. Würfel



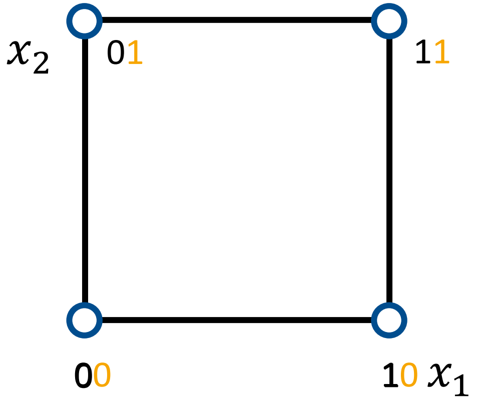
Vier Variablen: vier-dim. Würfel



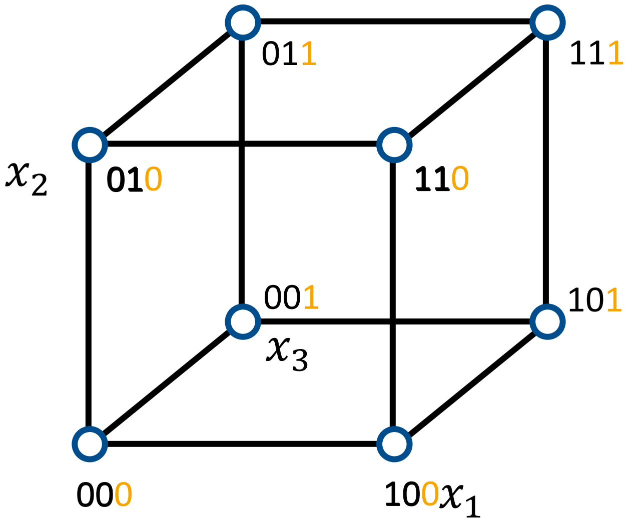
Veranschaulichung von Monomen und Polynomen

Eine Variable: ein-dim. Würfel

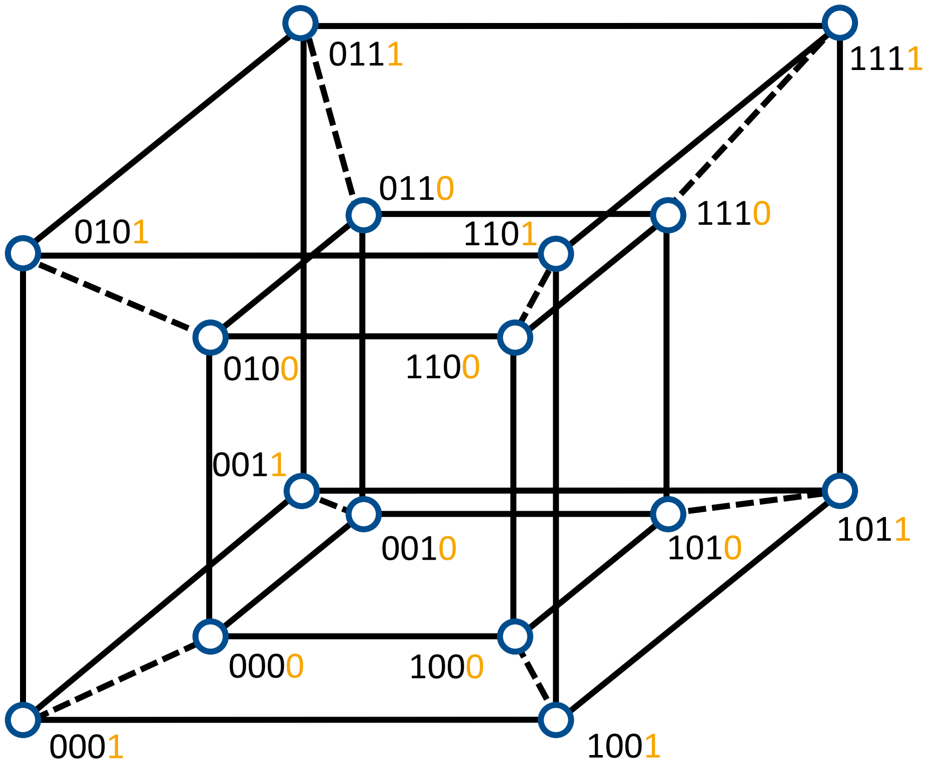
Zwei Variablen: zwei-dim. Würfel



Drei Variablen: drei-dim. Würfel



Vier Variablen: vier-dim. Würfel



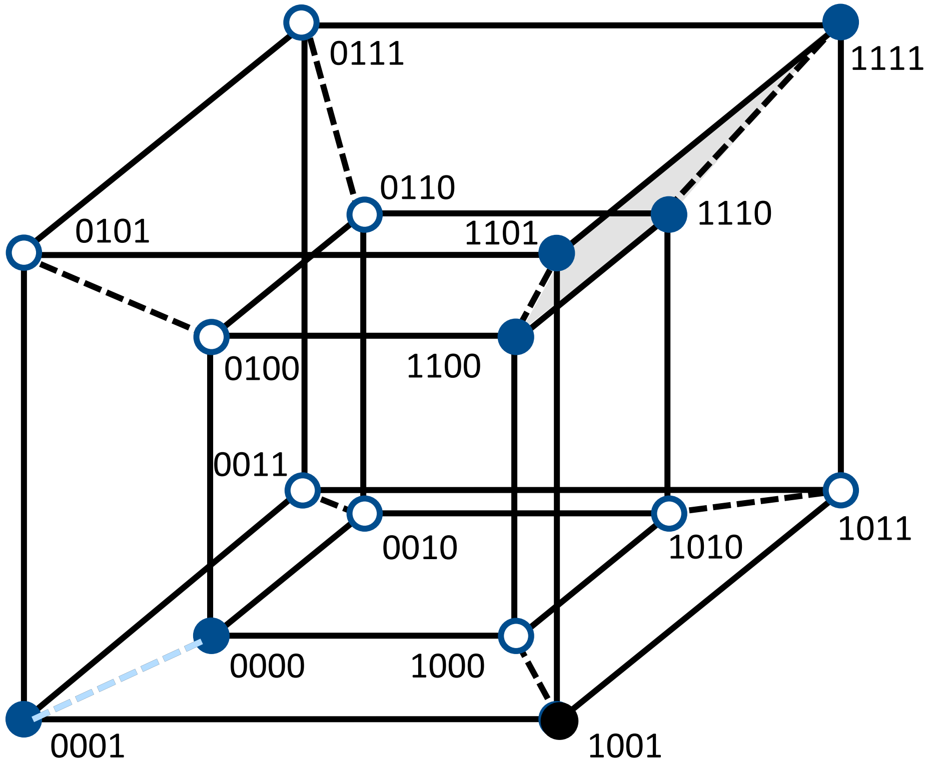
Veranschaulichung durch Würfel (1)

Jede Boolesche Funktion f in n Variablen und einem Ausgang kann über einen n-dimensionalen Würfel durch Markierung der $ON(f)$-Menge spezifiziert werden.

- Monome der Länge k entsprechen $n-k$ –dim. Teilwürfeln
- Polynome entsprechend der Vereinigung von Teilwürfeln

Beispiel:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$$



2-stufige Logikminimierung für single-output Funktionen

Formulierung als Überdeckungsproblem auf dem Würfel

Gegeben:

- Boolesche Funktion $f \in \mathcal{B}_n$
- als markierter n-dimensionaler Würfel

Gesucht:

- Minimale Überdeckung aller markierten Ecken
- mit maximalen Teilwürfeln

Minimal: minimale Anzahl an Teilwürfeln

Beispiel:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$