

Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Präsenzübung 1

Präsenzübung 1.1

In einem sortierten Array A der Größe n , welches bereits n natürliche Zahlen enthält, soll ein weiteres Element i eingefügt werden, sodass die Sortierung erhalten bleibt.

(a) Zunächst nutzen wir folgendes naives Verfahren:

- (i) Erweitere A um eine Speicherzelle.
- (ii) Füge i in die neue Speicherzelle ein.
- (iii) Wende Insertion Sort auf A an.

Beurteilt für jeden dieser Schritte die Worst-Case-Laufzeit. Wie hoch ist die Gesamtlaufzeit?

(b) Als zweite Idee probieren wir den nachfolgenden Algorithmus aus:

- (i) Erweitere A um eine Speicherzelle.
- (ii) Nutze Binärsuche, um die korrekte Einfügeposition p für i zu finden.
- (iii) Verschiebe jedes Element hinter p um eine Position nach hinten und setze $A[p] = i$.

Beurteilt auch für dieses Verfahren die Laufzeiten der einzelnen Schritte und die Gesamtlaufzeit. Ist dieses Verfahren im Allgemeinen besser als der Ansatz aus Teilaufgabe a?

Präsenzübung 1.2

Gegeben sei folgender Algorithmus.

Data : Array $A[0, \dots, n-1]$ mit natürlichen Zahlen

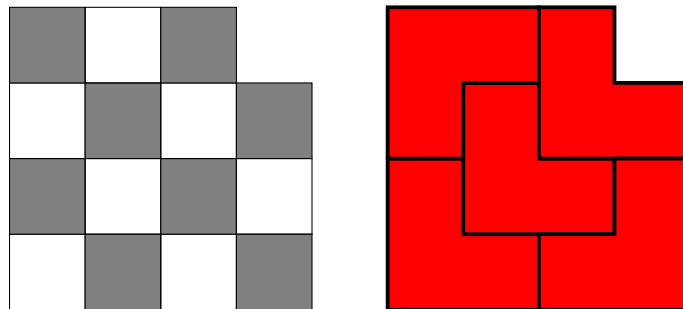
Result : ?

```
1 b := 1;
2 while b ≠ 0 do
3   b := 0;
4   i := 1;
5   while i < length(A) do
6     if A[i - 1] < A[i] then
7       swap A[i] and A[i - 1];
8       b := 1;
9     i := i + 1;
```

- (a) Führt diesen Algorithmus auf der Eingabe $A = [2, 1, 4, 3, 5]$ aus: gebt nach jedem Durchlauf der äußeren Schleife (Zeile 2) den aktuellen Inhalt von A an. Was tut der Algorithmus?
- (b) Wie oft wird (in Abhängigkeit von n) die **swap**-Operation in Zeile 7 im Worst-Case ausgeführt? Gebt für jedes n ein Array A_n der Größe n an, sodass die **swap**-Operation bei Eingabe A_n tatsächlich entsprechend oft ausgeführt wird.

Präsenzübung 1.3

Wir betrachten ein Schachbrett der Größe $2^n \times 2^n$, bei dem eine Ecke entfernt wurde. Dieses wollen wir mit L-förmigen Fliesen parkettieren, wobei jede Fliese genau 3 Felder des Schachbretts abdeckt. Folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für $n = 2$:



Zeige per Induktion über n : Für jede Zahl $n \geq 1$ kann das Schachbrett der Größe $2^n \times 2^n$, bei dem eine Ecke entfernt wurde, mit L-förmigen Fliesen parkettiert werden.

Präsenzübung 1.4

Stellt euch vor, ihr seid Gewürzhändler im Mittelalter und ein freundlicher Käufer will euch 8 Silbermünzen für 100g Zimt geben. Ihr wiegt auf eurer *Balkenwaage* somit 100g Zimt ab und wollt dem Käufer das Zimt geben, als der Käufer euch darauf hinweist, dass er zwar 9 Silbermünzen hat, eine davon aber geringfügig zu leicht sei. Er gibt euch alle 9 Münzen, will jedoch eine zurück haben. Wie findet ihr möglichst schnell heraus, welche Münze ihr zurückgebt? Wie würdet ihr vorgehen, wenn $n > 9$ Münzen gegeben sind von denen genau eine zu leicht ist?