Universität Bremen

FB3: Mathematik/Informatik

Prof. Dr. Daniel Neuen
Jens Schlöter

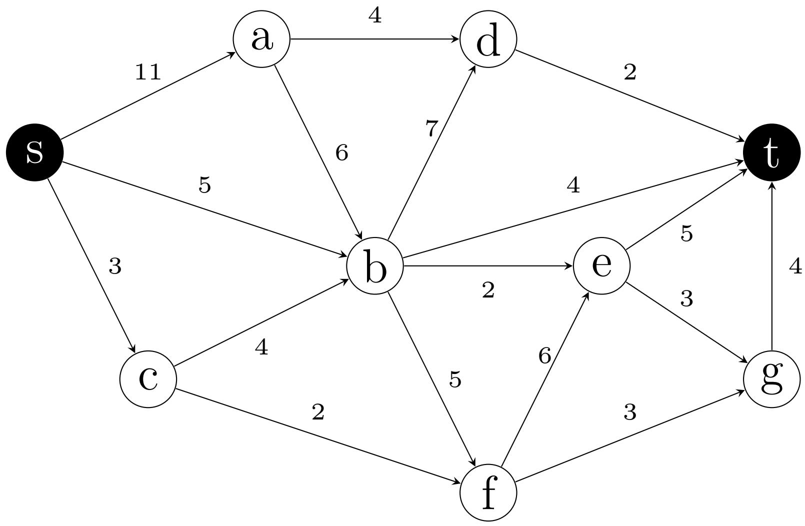
Wintersemester 2023/2024

Algorithmentheorie

Präsenzübung 6

Präsenzübung 6.1

Findet einen maximalen Fluss mithilfe des Ford-Fulkerson-Algorithmus in folgendem Netzwerk. Gebt dabei die verwendeten augmentierenden Wege sowie den aktuellen Fluss nach jeder Erhöhung mit an.



Präsenzübung 6.2

Betrachtet erneut den Algorithmus von Ford-Fulkerson für das Auffinden eines maximalen Flusses in einem gerichteten Netzwerk $N = (V, A, s, t, c)$ wobei $s, t \in V$ und $c(a)$ die Kapazität von Kante a darstellt. Seien $\overleftarrow{A} := \{\overleftarrow{a} : a \in A\}$ die Rückwärtskanten von N und seien die Residualkapazitäten für $a \in \overleftrightarrow{A} := A \cup \overleftarrow{A}$ definiert als

$$\bar{c}_f(a) := \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{falls } a \in A \text{ (Vorwärtskante)} \\ f(a) & \text{falls } a \in \overleftarrow{A} \text{ (Rückwärtskante).} \end{cases}$$

Definiere $A_f := \{a \in \overleftrightarrow{A} : \bar{c}_f(a) > 0\}$ und sei $D_f = (V, A_f)$ der Residualgraph eines zulässigen Flusses f in N. Sei außerdem P ein f-augmentierender $s - t-$Weg in D_f mit Bottleneck-Kapazität $\gamma := \min_{a \in P} \bar{c}_f(a)$.

Zeigt, dass die Erhöhung des Flusses f entlang P um γ einen zulässigen Fluss f' ergibt.

Präsenzübung 6.3

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit ganzzahligen Kapazitäten $c(a)$ für die Kanten $a \in A$. Seien $s, t \in V$ Quelle bzw. Senke in diesem Graphen. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) Sind die Kapazitäten gerade, so existiert ein maximaler s-t-Fluss, sodass $f(a)$ gerade ist für alle Kanten $a \in A$.

(b) Sind die Kapazitäten ungerade, so existiert ein maximaler s-t-Fluss, sodass $f(a)$ ungerade ist für alle Kanten $a \in A$.

(c) Ist s-t-Fluss f maximal, so gilt für jede Kante $a \in A$ entweder $f(a) = 0$ oder $f(a) = c(a)$.

(d) Es existiert ein maximaler s-t-Fluss, mit $f(a) = 0$ oder $f(a) = c(a)$ für jede Kante $a \in A$.

(e) Sind alle Kapazitäten verschieden, so ist der minimale Schnitt eindeutig.

(f) Multiplizieren wir jede Kapazität mit der positiven Zahl $\lambda \in \mathbb{R}^+$, so ist jeder minimale Schnitt im ursprünglichen Graphen auch ein minimaler Schnitt im modifizierten Graphen.

(g) Addieren wir zur Kapazität jeder Kante die positiven Zahl $\lambda \in \mathbb{R}^+$, so ist jeder minimale Schnitt im ursprünglichen Graphen auch ein minimaler Schnitt im modifizierten Graphen.

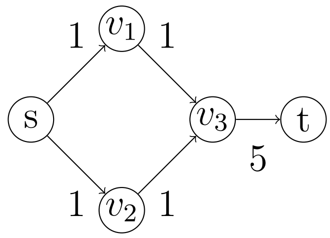
Lösung

(a) Die Aussage stimmt. Man kann zeigen, dass Ford-Fulkerson in diesem Fall einen Fluss berechnet für den $f(a)$ für alle $a \in A$ gerade ist (wir zählen hier 0 als gerade Zahl). Die Beweisidee ist ähnlich zum Beweis, dass Ford-Fulkerson einen ganzzahligen Fluß berechnet.

Wir können per Induktion über die Anzahl der Iterationen von Ford-Fulkerson zeigen, dass der aktuelle Fluss zum Beginn jeder Iteration die Eigenschaft erfüllt. Im Induktionsanfang betrachten wir den Fluss f zu Beginn der ersten Iteration. Per Definition von Ford-Fulkerson gilt dann $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und f erfüllt die gewünschte Eigenschaft.

Im Induktionsschritt betrachten wir den aktuellen Fluss f zu Beginn von Iteration $i > 1$. Per Induktionsvoraussetzung gilt für den aktuellen Fluss f' zu Beginn von Iteration $i - 1$, dass $f'(a)$ gerade ist für alle $a \in A$. Dann gilt insbesondere, dass alle Residualkapazitäten $\bar{c}_{f'}(a)$ gerade sind, da $\bar{c}_{f'}(a)$ entweder die Differenz zweier gerader Zahlen $(c(a) - f'(a))$ oder eine gerade Zahl $(f'(a))$ ist. Somit sind insbesondere die Bottleneck-Kapazitäten aller s-t-Wege in $D_{f'}$ gerade. Für den Fluss f gilt jetzt für jede Kante $a \in A$ entweder $f(a) = f'(a)$, $f(a) = f'(a) + \gamma$ oder $f(a) = f'(a) - \gamma$ für eine gerade Bottleneck-Kapazität γ. In allen Fällen ist $f(a)$ also entweder die gerade Zahl $f'(a)$ oder die Summe/Differenz der geraden Zahlen $f'(a)$ und γ. Es folgt, dass $f(a)$ gerade ist für alle $a \in A$.

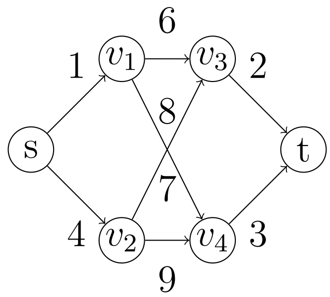
(b) Die Aussage stimmt nicht. In folgendem Beispiel gilt $f(a) = 2$ für den einzigen maximalen Fluss f und die Kante $a = (v_3, t)$:



(c) Die Aussage stimmt nicht. In dem Beispiel aus b) gilt für den einzigen maximale Fluss f und die Kante $a = (v_3, t)$, dass $0 < 2 = f(a) < 5 = c(a)$.

(d) Die Aussage stimmt nicht. In dem Beispiel aus b) gilt für den einzigen maximale Fluss f und die Kante $a = (v_3, t)$, dass $0 < 2 = f(a) < 5 = c(a)$.

(e) Die Aussage stimmt nicht. In dem Beispiel unten sind sowohl $C = \delta^+(\{s\})$ als auch $C' = \delta^+(V \setminus \{t\})$ minimale s-t-Schnitte:



(f) Die Aussage stimmt. Betrachte einen beliebigen gerichteten Graph $G = (V, A, c)$ und ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Sei $G' = (V, A, c')$ mit $c'(a) = \lambda \cdot c(a)$ für alle $a \in A$ der Graph, der durch das Multiplizieren der Kantenkapazitäten von G mit λ entsteht.

Sei $U \subseteq V$ mit $s \in U$ und $t \notin U$ beliebig und sei $C = \delta^+(U)$ (C ist also die Kantenmenge eines beliebigen s-t-Schnitts). Dann gilt $cap(C) = \sum_{a \in C} c(a)$ und

$$cap'(C) = \sum_{a \in C} c'(a) = \sum_{a \in C} \lambda \cdot c(a) = \lambda \cdot \sum_{a \in C} c(a) = \lambda \cdot cap(C)$$

für die Schnittkapazität $cap'(C)$ von C in G'.

Ein s-t-Schnitt C is also minimal in G' genau dann wenn C den Wert $\lambda \cdot cap(C)$ unter allen s-t-Schnitten minimiert. Dies ist der Fall, genau dann wenn C den Wert $cap(C)$ unter allen s-t-Schnitten minimiert. Also genau dann wenn C ein minimaler s-t-Schnitt in G ist.

(g) Die Aussage stimmt nicht. Im Beispiel aus b) ist der Schnitt $C = \delta^+(\{s\})$ minimal mit Schnittkapazität 2. Addieren wir 10 auf die Kapazitäten, dann hat C die Schnittkapazität 22, der Schnitt $C' = \delta^+(V \setminus \{t\})$ hat aber eine Schnittkapazität von 15. Der Schnitt C ist nach dem Addieren also nicht mehr minimal.