Mathematik III

Tutor:in: Tobias Rauer

SoSe 25

Bearbeiter:in: Maarten Behn, Niklas Borchers, Emre Kilinc

Übungsblatt 1

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a)

Ein Team aus 5 Robotern spielt 7 Spiele. Für jedes Spiel wird notiert, wie viele Tore jeder Roboter erzielt.

$$\Omega = \left(\mathbb{N}_0^5\right)^7$$

Jedes Spiel liefert ein 5-Tupel $(n_1, \ldots, n_5)$ mit $n_i \in \mathbb{N}_0$, das die Tore der fünf Roboter enthält. Über 7 Spiele ergibt sich ein 7-Tupel aus solchen 5-Tupeln.

Ja, der Raum ist *abzählbar*, denn $\mathbb{N}_0^{35}$ ist abzählbar.

1/1

b)

n LEDs werden betrieben, Ausfallzeiten werden gemessen.

$$\Omega = [0, \infty)^n$$

Jede LED hat eine Ausfallzeit $k_i \in [0, \infty)$, mit kontinuierlicher Messung der Zeit.

Nein, da $[0, \infty)^n \subset \mathbb{R}^n$ überabzählbar ist.

1,5/1,5

c)

50 Laptops, Bewertung von 1–5, je 25 bei Raumtemperatur und im Kühlhaus. Andere Einflüsse sind vernachlässigt.

Hier fehlt die Angabe welcher Laptop im Kühlhaus gelagert wurde. Dies ist eine essenzielle Information. In der Bewertung des Ergebnisses.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}^{50}$$

Jeder Laptop erhält eine Bewertung in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, unabhängig davon, ob er im Kühlhaus oder bei Raumtemperatur betrieben wurde.

Ja, da Ω endlich viele (genau 5^{50}) Elemente enthält.

1/1,5

Aufgabe 2

a)

$A = \{1, 2, 4\}$ (Zweierpotenzen)

b)

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (alle natürlichen Zahlen im Ergebnisraum)

c)

$C = \varnothing$ (keine Zahl zwischen 1 und 6 ist durch 7 teilbar)

4/4

Aufgabe 3

a)

Man kann alle $A \subseteq \Omega$ als $bin(A) := (b_1, .., b_m)$ darstellen mit $b_n = 1$ wenn $n \in A$ und $b_n = 0$ wenn $n \notin A$.

Dieses Tuple hat eine Länge von m.

Injektivität: Für zwei verschiedene Mengen $A \neq B$ gibt es mindestens ein i mit $b_i^{(A)} \neq b_i^{(B)}$, also sind auch $\text{bin}(A) \neq \text{bin}(B)$. Die Abbildung ist damit injektiv.

b)

Es gibt genau 2^m verschiedene Binärstrings der Länge m. Ebenso viele Teilmengen gibt es in der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$.

Da die Kodierung injektiv ist und beide Mengen dieselbe Mächtigkeit 2^m haben, ist die Abbildung auch surjektiv.

Fazit: Die Binärkodierung bildet $\mathcal{P}(\Omega)$ bijektiv auf die Menge aller Binärstrings der Länge m ab.

4/4

Aufgabe 4

a)

Antwort: *Falsch.* denn, jede Teilmenge von Ω hat maximal 6 Elemente wenn Ω 6 Elemente hat.

Schaut euch nochmal die Frage an. 0/1

b)

Antwort: *Korrekt.* Da $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $a < b$, enthält es unendlich viele reelle Zahlen. Die Mächtigkeit ist gleich der der reellen Zahlen, also überabzählbar. Bsp.:(1, 1.1, 1.11, 1.111, ..., 2)

1/1

c)

Antwort: *Korrekt.* denn,

Abgeschlossenheit gegenüber endlichen Vereinigungen heißt:

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A} \;\; A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$$

Abgeschlossenheit gegenüber abzählbaren Vereinigungen heißt:

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

Wenn abzählbar abgeschlossen dann endlich abgeschlossen Jede Menge die über abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist auch über endlichen Vereinigungen abgeschlossen.

$$\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$$

$$\forall (A_n)_{n\in\{1,2\}} \subseteq \mathcal{A} : \cup_{n\in\{1,2\}} A_n \in \mathcal{A} \iff \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A} \;\; A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$$

Wenn endlich dann abgeschlossen abzählbar abgeschlossen Da die Menge endlich ist, ist jede abzählbaren Vereinigungen eine endliche Vereinigung

1/1

d)

Antwort: *Falsch.* Ein Gegenbeispiel:

$\Omega = \mathbb{N}$ $\mathcal{A} = \{\{k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} k \in \mathbb{N} = \mathbb{N}$ Aber $\mathbb{N} \notin \mathcal{A}$ 1/1

14,5/16