Mat3 Blatt 4

Gruppe: 7
Maarten Behn, Niklas Borchers, Emre Kilinc

13 Kombinatorik

a)

Die Anzahl der Möglichkeiten, 9 Studierende in drei Gruppen zu je drei aufzuteilen (ohne Beachtung der Reihenfolge der Gruppen), ist:

$$\frac{1}{3!} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{1}{6} \cdot 84 \cdot 20 \cdot 1 = \frac{1680}{6} = 280$$

Man teilt hier nicht nochmal durch 6. 0,5/1

b)

Jede Gruppe soll mindestens zwei und höchstens vier Studierende enthalten.
Alle Permutationen von $(2, 3, 4)$ ergeben $3! = 6$ Möglichkeiten.
Für eine feste Verteilung $(2, 3, 4)$ berechnen wir:

$$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = 36 \cdot 35 \cdot 1 = 1260$$

also $6 \cdot 1260 = 7560$ Ihr vergesst die 1680 aus a), (3,3,3) ist auch eine Möglichkeit!

0,5/1

c)

Jede Gruppe soll mindestens eine Person enthalten.
Dies entspricht der Anzahl der surjektiven Aufteilungen der 9 Studierenden auf 3 Gruppen.
Gesamtzahl der Verteilungen auf 3 Gruppen (ununterscheidbar) unter Berücksichtigung der Gruppenzugehörigkeit:

Ist in der Vorlesung nicht definiert, dies müsste also definiert und mehr begründet werden (Rechnung durchführen).

Stirling-Zahl 2. Art: $S(9,3) = 3025$

Und jede Gruppe kann ein Label (Name A, B, C) erhalten:

$3! = 6$

$$3025 \cdot 6 = 18150$$

1/2

14 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Wahrscheinlichkeitsraum:

- Ω: Menge aller Permutationen der 40 Pferde auf die 40 Reiter:innen
- $|\Omega| = 40!$ \item Gleichverteilung: $P(\omega) = \frac{1}{40!}$ für alle $\omega \in \Omega$

a)

Wahrscheinlichkeit, dass ein:e bestimmte:r Reiter:in (z.B. Reiter:in A aus Deutschland) das eigene Pferd bekommt:

$$P = \frac{1}{40}$$

Warum?

0,5/1

b

Wahrscheinlichkeit, dass alle vier deutschen Reiter:innen ihre eigenen Pferde bekommen:

$$\frac{(40-4)!}{40!} = \frac{36!}{40!} = \frac{1}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} = \frac{1}{2193369600}$$

1/1

c)

Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein:e deutsche:r Reiter:in ein deutsches Pferd bekommt: Genauso ist, wenn 1 - kein deutsches Pferd an deutsche Reiter.

Anzahl günstiger Fälle $= \binom{36}{4} \cdot 36!$

Nein.

$\text{Gesamtzahl Fälle} = 40! \Rightarrow P(\text{kein deutsches Pferd an deutsche Reiter}) = \frac{\binom{36}{4} \cdot 3}{40!}$
Daher:

$P(\text{mindestens ein deutsches Pferd an deutsche Reiter}) = 1 - \frac{\binom{36}{4} \cdot 36!}{40!}$ 0/2

15. Poisson- und Binomial-Verteilung

Anzahl der eingereichten Manuskripte: $N \sim \text{Pois}(\lambda)$
Anzahl der angenommenen Manuskripte: $A \mid N = n \sim \text{Binomial}(n, p)$
für $N = n$

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$\mathbb{P}(A = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Zu zeigen:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{P}(A = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-p\lambda}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A=k \mid N=n) \cdot \mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \frac{p^k \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^m}{m!} \\
&= \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}.
\end{aligned}
$$

4/4

Quelle:
https://www.motapa.de/open/schilling89.pdf (20.05. 21:14)

16 Multiple Select-Aufgabe

- Kombinationen mit Wiederholung: $\binom{n+k-1}{k}$
- Kombinationen ohne Wiederholung: $\binom{n}{k}$
- Permutationen mit Wiederholung: n^k
- Permutationen ohne Wiederholung: $\frac{n!}{(n-k)!}$

a)

Wahr,
da für $1 \leq k \leq n$ gilt: $\binom{n+k-1}{k} > \binom{n}{k}$ Falsch. Setzt k=1 .

0/1

b)

Wahr,
da für $1 \leq k \leq n$ gilt: $\frac{n!}{(n-k)!} \geq \binom{n}{k}$

1/1

c)

Wahr,
da für $n, k \geq 1$ gilt: $n^k > \binom{n+k-1}{k}$ Falsch. Setzt k = 1 .

0/1

d)

Falsch,
da die Menge an Permutationen mit Wiederholung ist gleich n^k nicht kleiner. 1/1

9,5/16