Mat3 Blatt 6

Gruppe: 7
Maarten Behn, Niklas Borchers, Emre Kilinc

21.

Da $\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$ und $Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$ gilt:

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 3) &= \mathbb{P}\left(\frac{-2-3}{2} \leq Z \leq \frac{-3-3}{2}\right) \\
&= \mathbb{P}(-2.5 \leq Z \leq 0) \\
&= \phi(0) - \phi(-2.5) \\
&= \phi(0) - (1 - \phi(2.5)) \\
&= 0.5000 - (1 - 0.99379) \\
&= 0.5000 - 0.00621 \\
&= 0.49379
\end{aligned}$$

1/1

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X - 2 < a) &= 0.95 \\
\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{a-1}{2}\right) &= 0.95 \\
\phi\left(\frac{a-1}{2}\right) &= 0.95 \\
\frac{a-1}{2} &= \phi^{-1}(0.95) \\
&= 1.64 \\
a &= 4.28
\end{aligned}$$

1/1

c)

Da $f(x)$ eine Zufallszahl mit Dichte $f_X(x)$ ist
und $Y = u(X)$ eine bijektive Transformation, dann hat Y die Dichte:

$$g(y) = f_X(u^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy}(u^{-1}(y)) \right|$$

wobei:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Y = X - 2 \\ \Rightarrow\ & X = Y + 2 \\ \Rightarrow\ & u^{-1}(y) = y + 2 \\ \Rightarrow\ & \frac{d}{dy}(u^{-1}(y)) = \frac{d}{dy}(y+2) = 1 \end{aligned}$$

Daher gilt für die Aufgabe:

$$\begin{aligned} g(y) &= f_X(y+2) \cdot |1| \\ &= f_X(y+2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(\frac{y+2-\mu}{\sigma}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} exp\left(\frac{(y+2-3)^2}{8}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} exp\left(\frac{(y-1)^2}{8}\right) \end{aligned}$$

4/4

Quelle zum change of variables in the probability density function Trick:
https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function#Function_of_random_variables_and_change_of_variables_in_the_probability_density_function (1.6.'25 11:16)

22

Gesucht war: P(X <= x_0 + y | X >= x_0) !

0 = P(X = 0) = $$\mathbb{P}(X \leq x_0 | X \geq x_0) = \frac{\mathbb{P}(X \leq x_0 \overset{\cap}{\cancel{+}} X \geq x_0)}{\mathbb{P}(X \geq x_0)}$$

wobei

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

0 = P(X = x_0) = $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x_0 \overset{\cap}{\cancel{+}} X \geq x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+y} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x_0}^{x_0+y} \\ &= e^{-\lambda x_0} - e^{-\lambda x_0 + y} \\ &= e^{-\lambda y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq x_0) &= \int_{x_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x_0}^{\infty} \\ &= e^{-\lambda x_0}\end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x_0 | X \geq x_0) &= \frac{e^{-\lambda y}}{e^{-\lambda x_0}} \\ &= e^{-\lambda(y - x_0)}\end{aligned}$$

0/4

23

a)

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{\forall x} x f(x) \\ &= \underline{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right)} + \left(-2 \times \frac{1}{4}\right) + \underline{\left(-\frac{1}{2} \times 0\right)} + \left(\frac{3}{7} \times \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{8}{11} \times \frac{1}{5}\right) \\ &= -0.1635\end{aligned}$$

f f

1/3

b

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)} e^{-\lambda}}{(x-1)!} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

1/1

24

a)

Falsch,
wenn X eine kontinuierliche Zufallszahl ist.
z.B. eine kontinuierliche gleichmäßige Verteilung von 0 bis 1.

Dann wäre X aber nicht konstant, also gelte nicht P(X = x) = 1.

0/1

b)

Falsch,
denn $E(X) = \frac{a+b}{2}$ und $\infty < a < b < \infty$, es hängt von der länge aber auch von den Vorzeichen von a und b ab.

1/1

c)

Wahr,
das implizit das X diskret ist und daher gilt $E(X) = \sum_{\forall x} x f(x)$.

1/1

d)

Wahr,

Der Erwartungswert existiert für alle Lambda und damit ist die Existenz unabhängig von Lambda.

da $E(X) = \lambda$ und $\lambda \in (0, \infty)$ da λ existiert, existiert auch der

Erwartungswert.

0,5/1

8,5/16