Mat3 Blatt 8

Gruppe: 7

Maarten Behn, Niklas Borchers, Emre Kilinc

29. Berechnung von Varianzen

> Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X , gegeben durch
>
> $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2, \\ \frac{1}{4} & \text{für } -2 \leq x < \frac{-1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{-1}{2} \leq x < \frac{3}{7}, \\ \frac{4}{5} & \text{für } \frac{3}{7} \leq x < \frac{8}{11}, \\ 1 & \text{für } \frac{8}{11} \leq x. \end{cases}$$
>
> a) Berechnen Sie die Varianz der Zufallsvariable X.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\forall x} x f(x) \\ &= \left(-2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{8}{11} \cdot \frac{1}{5}\right) \\ &\approx -0.350974 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\forall x} x^2 f(x) \\ &= \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{49} \cdot \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{64}{121} \cdot \frac{1}{5}\right) \\ &\approx 1.22387 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2)) - (E(X))^2 \approx 1.100204$$

2/2

> b) Berechnen Sie die Varianz der Exponentialverteilung mit Intensitätsparameter λ > 0.

Aus der Vorlesungen:

$$m_k\left(\mathrm{Exp}(\lambda)\right) = \frac{k!}{\lambda^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}(X) = m_1(\mathrm{Exp}(\lambda)) = \lambda \int_0^\infty x \cdot \exp(-\lambda x)\, dx$$

Mit der Substitution:

$$u = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{u}{\lambda} \frac{du}{dx} = \lambda \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\lambda}$$

ergibt sich:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \int_0^\infty \frac{u}{\lambda} \cdot \exp(-u) \cdot \frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty u \cdot \exp(-u)\, du$$
$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda} \cdot 1! = \frac{1}{\lambda}$$

$\mathbb{E}(X^2)$

$$\mathbb{E}(X^2) = m_2(\mathrm{Exp}(\lambda)) = \lambda \int_0^\infty x^2 \cdot \exp(-\lambda x)\, dx$$

Mit der Substitution:

$$u = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{u}{\lambda} dx = \frac{du}{\lambda}$$

ergibt sich:

$$\mathbb{E}(X^2) = \lambda \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2 \cdot \exp(-u) \cdot \frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty u^2 \cdot \exp(-u)\, du$$
$$= \frac{1}{\lambda^2} \cdot \Gamma(3) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot 2! = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

2/2

30. Berechnung von Medianen.

> Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X , gegeben durch:
>
> $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2, \\ \frac{1}{4} & \text{für } -2 \leq x < \frac{-1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{-1}{2} \leq x < \frac{3}{7}, \\ \frac{4}{5} & \text{für } \frac{3}{7} \leq x < \frac{8}{11}, \\ 1 & \text{für } \frac{8}{11} \leq x. \end{cases}$$
>
> a) Berechnen Sie die Menge der Mediane der Zufallsvariable X.

Wir testen bei jeder Sprungstelle y ob

$$F_X(y) \geq \frac{1}{2} \wedge \lim_{x \to y} F_X(x) \leq \frac{1}{2}$$

Sprung bei -2

$$F_X(-2) = \frac{1}{4} \ngeq \frac{1}{2}$$

Sprung bei $-\frac{1}{2}$

$$F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} F_X(x) = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

Sprung bei $\frac{3}{7}$

$$F_X\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{4}{5} \geq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{7}} F_X(x) = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Sprung bei $\frac{8}{11}$

$$\lim_{x \to \frac{8}{11}} F_X(x) = \frac{4}{5} \nleq \frac{1}{2}$$

Daher ist die Menge M: Warum sind die Werte in (-1/2, 3/7) auch Mediane? Begründung fehlt!

$$M = \left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{7}\right]$$

1/2

> b) Berechnen Sie die Menge der Mediane Bernoulli-Verteilung mit gegebenem Erfolgsparameter $p \in [0, 1]$.

Aus der Vorlesungen:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Für alle Werte m im Median gilt:

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \land P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

Für $m < 0$

$$P(X \leq m) = 0 \ngeq \frac{1}{2}$$

Für $m = 0$:

$$P(X \leq 0) = P(X = 0) = 1 - p \geq \frac{1}{2} \iff p \leq \frac{1}{2}$$

$$P(X \geq 0) = P(X=0) + P(X=1) = 1 \geq \frac{1}{2}$$

Für $0 < m < 1$

$$P(X \leq m) = P(X=0) = 1-p \geq \frac{1}{2} \iff p \leq \frac{1}{2}$$

$$P(X \leq m) = P(X=1) = p \geq \frac{1}{2}$$

>=

Für $m = 1$:

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 1 \geq \frac{1}{2}$$

$$P(X \geq 1) = P(X=1) = p \geq \frac{1}{2}$$

Für $m > 1$

$$P(X \geq m) = 0 \ngeq \frac{1}{2}$$

Die Menge M ist also:

$$M = \begin{cases} 0, & p < \frac{1}{2}, \\ [0,1], & p = \frac{1}{2}, \\ 1, & p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2/2

31. Kovarianz und Korrelation.

> Angenommen, X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen, die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P) definiert sind.
> Es gelte $E[X_1] = E[X_2] = 0$ sowie $Var[X_1] = Var[X_2] = \sigma^2$ für eine reelle Konstante $\sigma^2 > 0$.

> Schließlich seien zwei reellwertige Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 definiert als $Y_1 := X_1 + 2X_2$ und $Y_2 := 4X_1 - 3X_2$.
>
> a) Berechnen Sie die Kovarianz von Y_1 und Y_2.

Da X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt:

- $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$ sehr gut!
- $\mathrm{Cov}(X_2, X_1) = 0$
- $\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$
- $\mathrm{Cov}(X_2, X_2) = \mathrm{Var}(X_2) = \sigma^2$

Durch einsetzten und linearität gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) &= \mathrm{Cov}(X_1 + 2X_2,\ 4X_1 - 3X_2) \\
&= \mathrm{Cov}(X_1,\ 4X_1 - 3X_2) + \mathrm{Cov}(2X_2,\ 4X_1 - 3X_2) \\
&= 4\,\mathrm{Cov}(X_1, X_1) - 3\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\
&+ 8\,\mathrm{Cov}(X_2, X_1) - 6\,\mathrm{Cov}(X_2, X_{2)} \\
&= 4\sigma^2 - 0 + 0 - 6\sigma^2 \\
&= -2\sigma^2
\end{aligned}$$

2/2

> b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von Y_1 und Y_2.

Aus der Vorlesungen:

$$\rho(Y_1, Y_2) = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y_2)}}$$

da gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y_1) &= \mathrm{Var}(X_1 + 2X_2) \\
&= \mathrm{Var}(X_1) + 4\,\mathrm{Var}(X_2) + 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\
&= \sigma^2 + 4\sigma^2 + 0 \\
&= 5\sigma^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(Y_2) &= \operatorname{Var}(4X_1 - 3X_2) \\
&= 16\operatorname{Var}(X_1) + 9\operatorname{Var}(X_2) - 2\cdot 4\cdot 3\cdot \operatorname{Cov}(X_1, X_2) \\
&= 16\sigma^2 + 9\sigma^2 + 0 \\
&= 25\sigma^2
\end{aligned}
$$

ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\rho(Y_1, Y_2) &= \frac{-2\sigma^2}{\sqrt{5\sigma^2}\cdot\sqrt{25\sigma^2}} \\
&= \frac{-2\sigma^2}{\sqrt{5}\sigma\cdot 5\sigma} \\
&= \frac{-2\sigma^2}{5\sigma^2\sqrt{5}} \\
&= \frac{-2}{5\sqrt{5}} \\
&= \frac{-2\sqrt{5}}{25}
\end{aligned}
$$

2/2

Multiple Select-Aufgabe.

> Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P) definiert ist.
> Betrachten Sie unter diesen Voraussetzungen die folgenden Aussagen.
>
> a) Falls X einen eindeutig bestimmten Median besitzt, so existiert der Erwartungswert von X (in R).

Nein, z.B. die Cauchy-Verteilung.
Sie hat die Dichtefunktion:

$$
f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Sie hat ein Median bei 0 da sie symemtrisch um 0 ist.
Aber kein Erwartungswert da das Integral divergiert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx = \infty$$

1/1

> b) Falls X nur endlich viele Werte annehmen kann und $E[X] = 0$ gilt, so ist Null auch ein Median von X.

Nein, z.B. bei

$$P(X = 1) = \frac{1}{3} \;\; P(X = 2) = \frac{1}{3} \;\; P(X = -3) = \frac{1}{3}$$

ist

$$E(X)\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{3} = 0$$

aber da

$$P(X \leq 1) = \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2} \land P(X \geq 1) = \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2}$$

$$P(X \geq 2) = \frac{1}{3} \ngeq \frac{1}{2}$$

$$P(X \leq -3) = \frac{1}{3} \nleq \frac{1}{2}$$

1

ist 2 der Median.

1/1

> c) Falls X eine Lebesguedichte besitzt und diese Lebesguedichte achsensymmetrisch (zur Null-Achse) ist, so ist Null der eindeutig bestimmte Median von X.

Nein,
bei einer symmetrischen Dichte ist zwar 0 ein Median, aber nicht

unbedingt der einzige.

z.B.

Mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Jeder Wert $m \in [-1,1]$ erfüllt:

$P(X \le m) \ge \frac{1}{2}$, sobald $m \ge 0$

$P(X \ge m) \ge \frac{1}{2}$, sobald $m \le 0$

1/1

> d) Falls X diskret verteilt ist, so ist es ausgeschlossen, dass der Median von X eindeutig bestimmt ist.

Nein, z.B.

$$P(X=1) = \frac{1}{4} \quad P(X=2) = \frac{1}{8} \quad P(X=3) = \frac{5}{8}$$

da

$$P(X \le 1) = \frac{1}{4} \not\ge \frac{1}{2}$$

$$P(X \le 2) = \frac{3}{8} \not\ge \frac{1}{2}$$

$$P(X \le 3) = \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2} \wedge P(X \ge 3) = \frac{5}{8} \ge \frac{1}{2}$$

ist 3 der einzige Median.

1/1

15/16