Mat3 Blatt 10

Gruppe: 7
Maarten Behn, Niklas Borchers, Emre Kilinc

Aufgabe 37: Skalentypen

> Angenommen, in einer Gruppe von Informatik-Studierenden werden (im Rahmen der Bevölkerungsforschung) verschiedene Merkmale erhoben. Geben Sie für die nachstehenden Merkmale jeweils den zugehörigen Skalentyp des Merkmals an und begründen Sie Ihre Antworten

> (a) Anzahl Fachsemester

→ Verhältnisskala
Die Anzahl der Fachsemester ist eine zählbare Größe mit natürlichem Nullpunkt und sinnvollen Verhältnisaussagen. 1/1

> (b) Bundesland des Erstwohnsitzes (bzw. Land bei Ausland)

→ Nominalskala
Die Merkmalsausprägungen sind Namen oder Kategorien, zwischen denen keine Rangfolge oder arithmetische Operation möglich ist.
1/1

> (c) Durchschnittsnote bei den bestandenen Modulprüfungen

→ Ordinalskala
Aus der Vorlesung:
"Ein klassisches Beispiel für ein ordinalskaliertes Merkmal sind Schulnoten. Zwar weiß man, dass die Note 1 besser ist als die Note 2, aber der Abstand zwischen 1 und 2 lässt sich sicherlich nicht

interpretieren oder vergleichen etwa mit demjenigen zwischen 4 und 5."

1/1

> (d) Verfügbares Monats-Nettoeinkommen (in Euro und Cent)

→ Verhältnisskala
Das Einkommen ist eine metrische Größe mit natürlichem Nullpunkt und interpretierbaren Verhältnissen.

1/1

Aufgabe 38: Beschreibende Statistik

> Bei der Messung der Körpergröße von 20 männlichen Schülern ergaben sich die folgenden Werte (in cm):

```
149 147 158 165 153 153 168 158 163 159
177 175 163 170 162 162 170 153 147 157
```

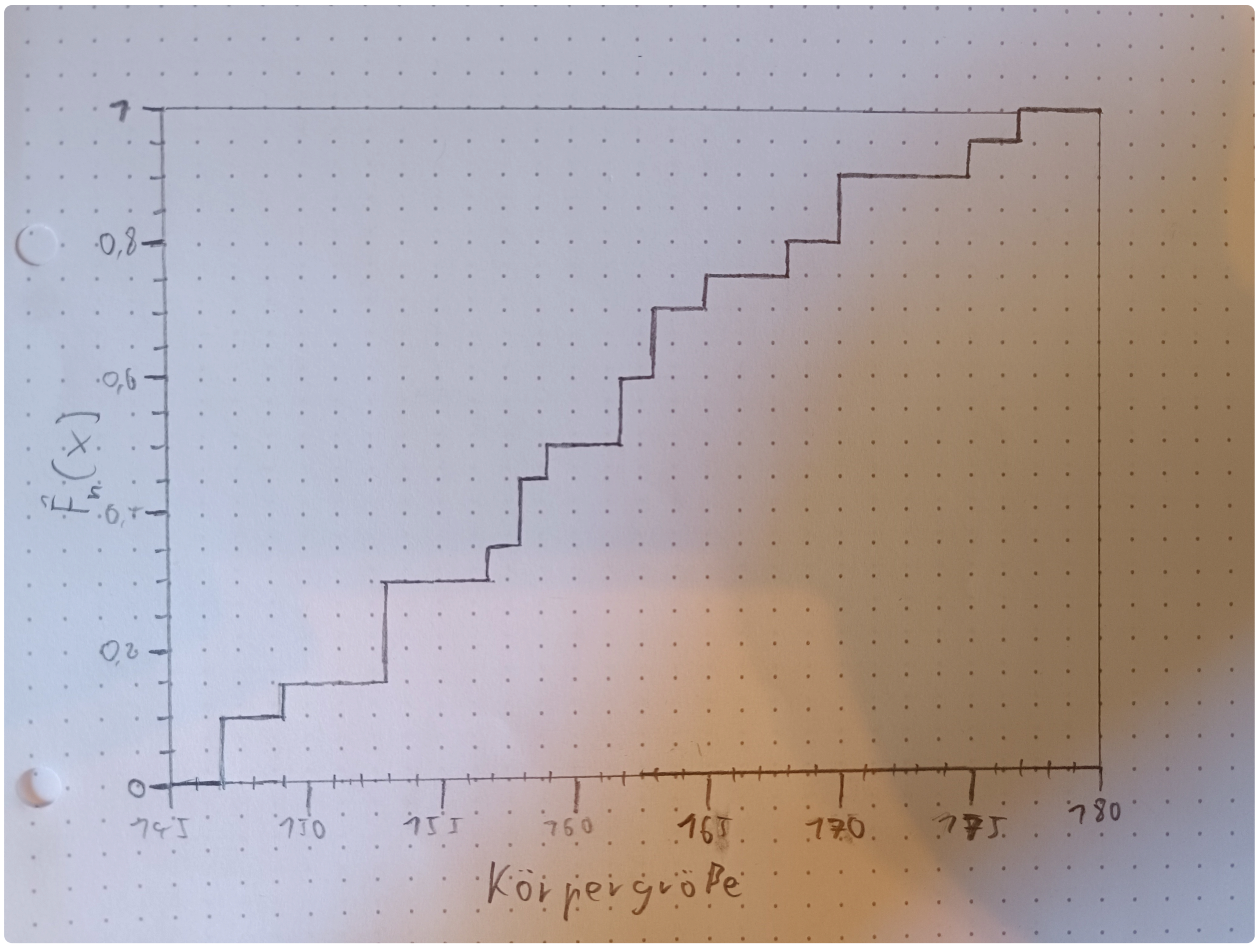
> (a) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion der angegebenen Messreihe (von Hand).

Sortierte Werte:
147, 147, 149, 153, 153, 153, 157, 158, 158, 159,
162, 162, 163, 163, 165, 168, 170, 170, 175, 177

Sei $x_1, \ldots, x_n$ die Messreihe ($n = 20$), dann gilt:

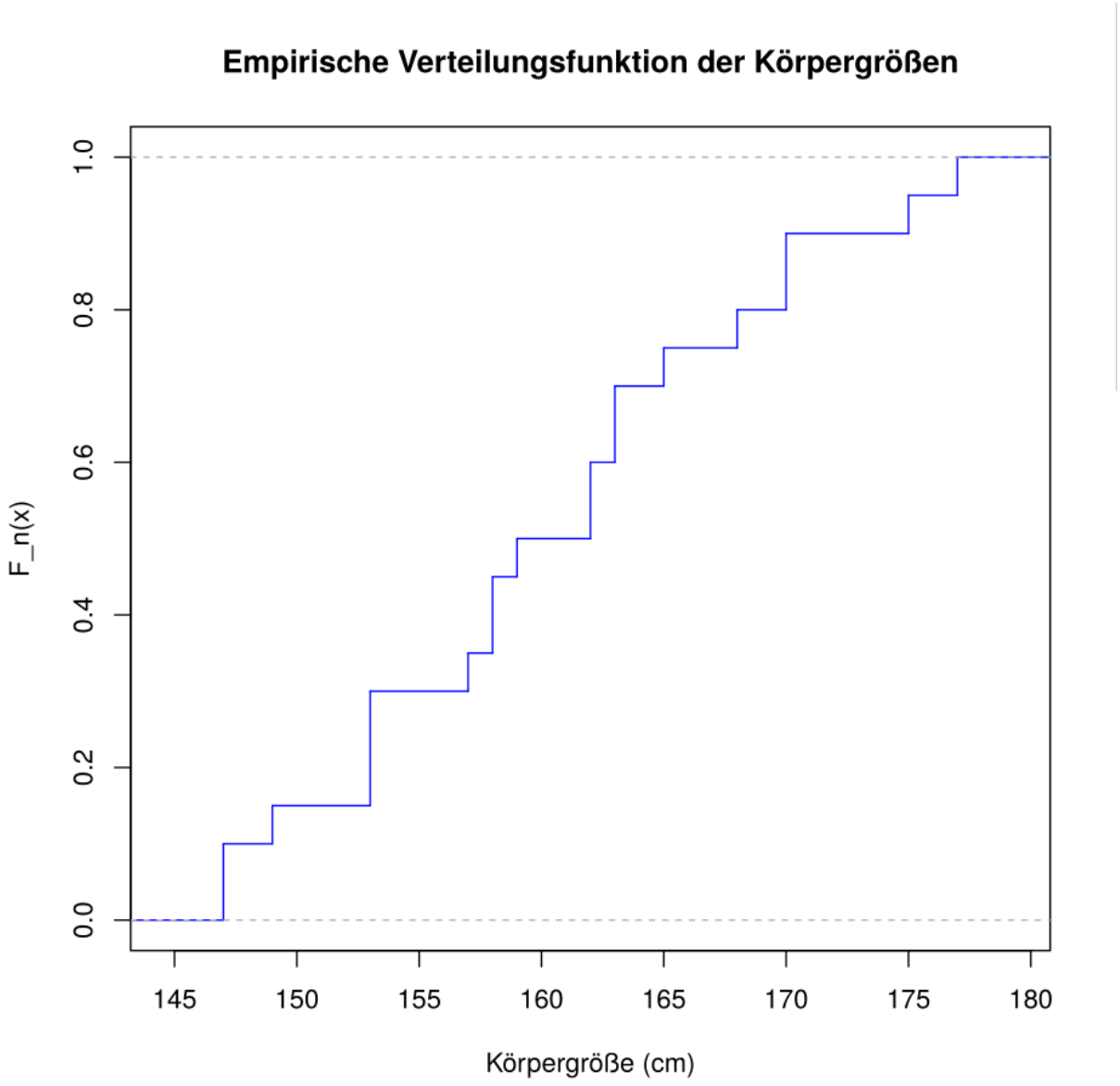
Die empirische Verteilungsfunktion ist stückweise konstant und steigt bei jedem Wert um $\frac{1}{20}$ an.

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{20} \cdot \#\{i : x_i \leq x\}$$



R code zum vergleichen:

```
x <- c(149, 147, 158, 165, 153, 153, 168, 158, 163, 159,
       177, 175, 163, 170, 162, 162, 170, 153, 147, 157)

x_sorted <- sort(x)

edf <- ecdf(x)

plot(edf, main = "Empirische Verteilungsfunktion der
Körpergrößen",
     xlab = "Körpergröße (cm)", ylab = "F_n(x)", col =
"blue",
     verticals = TRUE, do.points = FALSE)
```

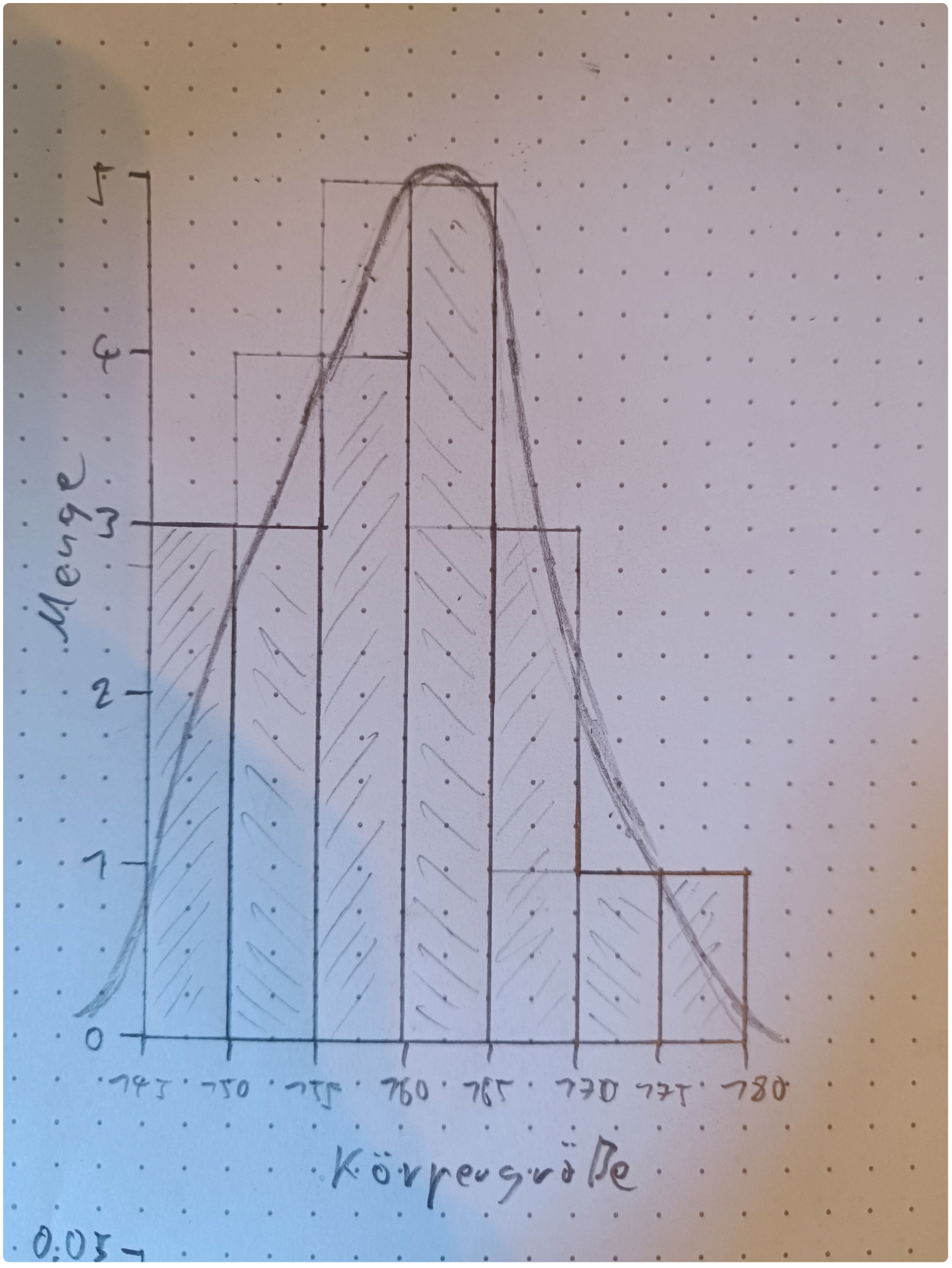


> (b) Zeichnen Sie ein Histogramm der angegebenen Messreihe mit der folgenden Klasseneinteilung: $(145, 150], (150, 155], \ldots, (175, 180]$.
> (c) Zeichnen Sie ein gleitendes Histogramm der angegebenen Messreihe.

Klassen:

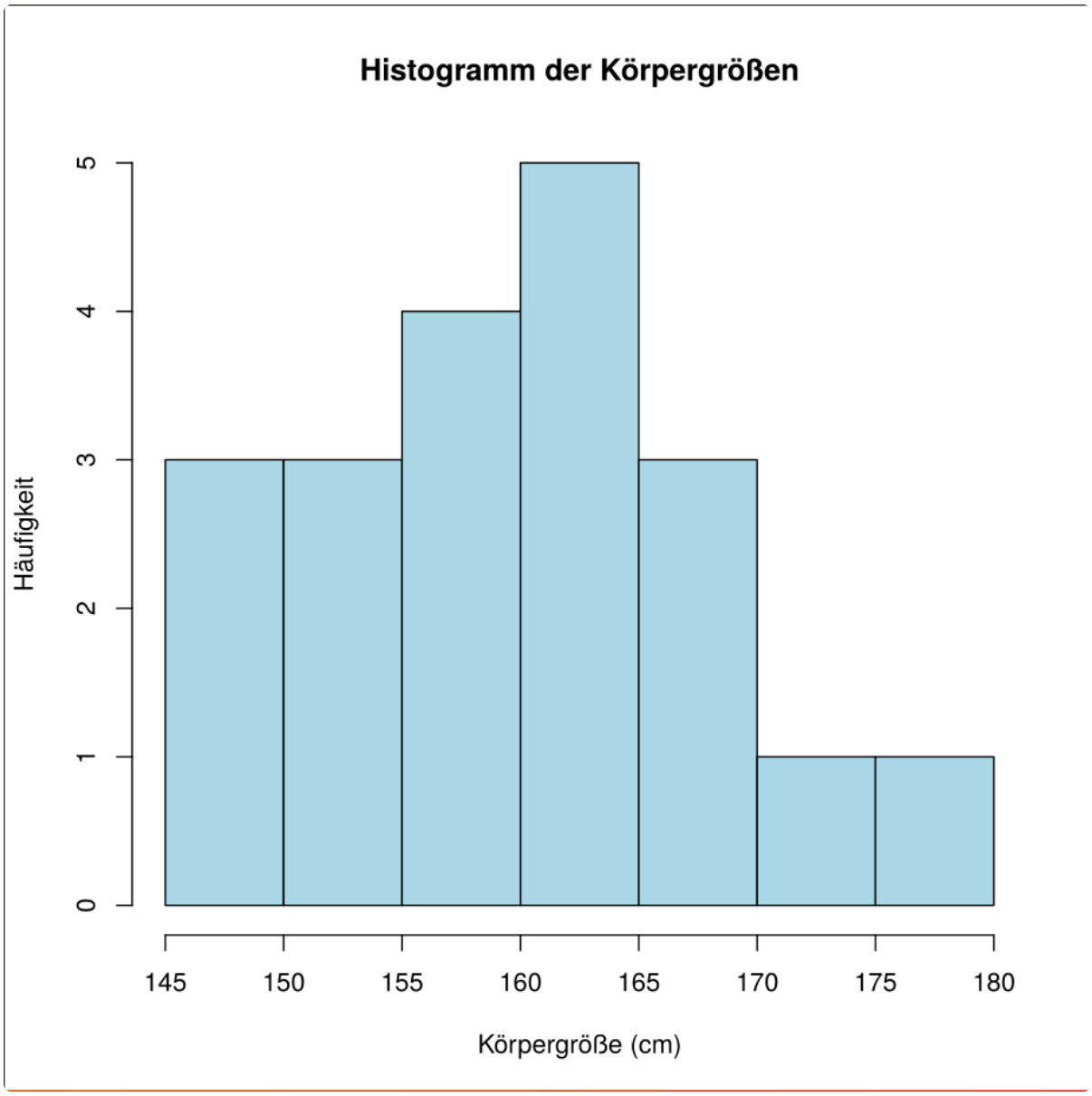
- $(145, 150]$: 3 Werte $(147, 147, 149)$
- $(150, 155]$: 3 Werte $(153, 153, 153)$
- $(155, 160]$: 4 Werte $(157, 158, 158, 159)$
- $(160, 165]$: 5 Werte $(162, 162, 163, 163, 165)$
- $(165, 170]$: 3 Werte $(168, 170, 170)$

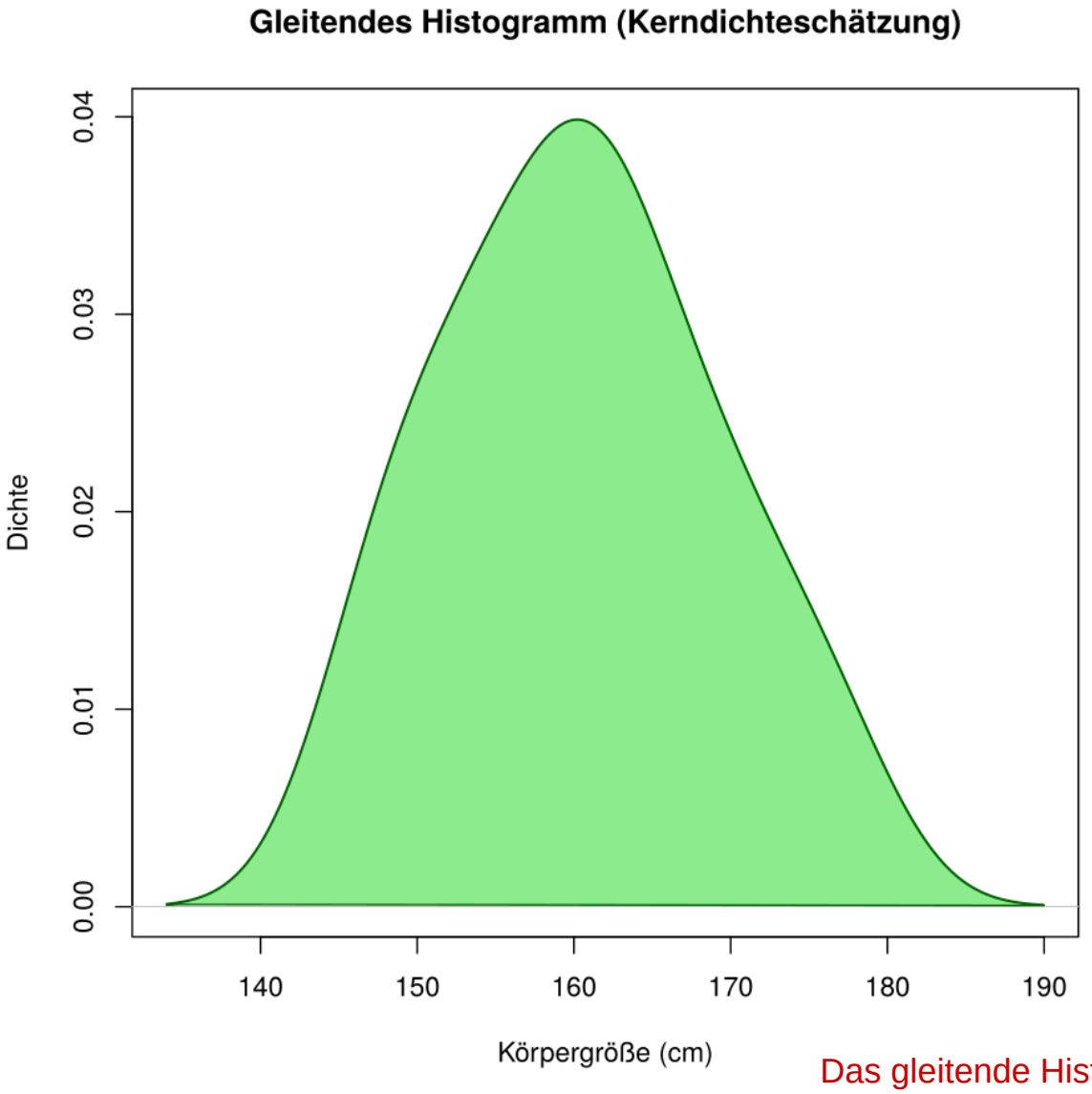
- $(170, 175]$: 2 Werte $(175, 177)$



R code zum vergleichen:

```
x <- c(149, 147, 158, 165, 153, 153, 168, 158, 163, 159,
       177, 175, 163, 170, 162, 162, 170, 153, 147, 157)

breaks <- seq(145, 180, by = 5)

hist(x, breaks = breaks, right = TRUE,
     main = "Histogramm der Körpergrößen",
     xlab = "Körpergröße (cm)", ylab = "Häufigkeit",
     col = "lightblue", border = "black")

dens <- density(x, bw = "nrd0")

plot(dens, main = "Gleitendes Histogramm
(Kerndichteschätzung)",
     xlab = "Körpergröße (cm)", ylab = "Dichte", col =
"darkgreen", lwd = 2)
polygon(dens, col = "lightgreen", border = "darkgreen")
```


Histogramm der Körpergrößen
Häufigkeit
0
1
2
3
4
5
145
150
155
160
165
170
175
180
Körpergröße (cm)



Das gleitende Histogramm verwendet einen anderen Kern!

0/1

> (d) Berechnen Sie die empirische Schiefe des Merkmals ”Körpergröße von männlichen Schülern“ anhand der angegebenen Messreihe und interpretieren Sie Ihr Ergebnis anhand der erstellten Graphiken.

Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{3209}{20} = 160.45 \text{ cm}$$

Empirische Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \approx 8.73 \text{ cm}$$

Empirische Schiefe:

Das ist nicht die Formel zur Berechnung der Schiefe einer empirischen Verteilung. Man betrachtet nicht die korrigierte empirische Varianz sondern die Unkorrigierte.

$$g_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^3 \approx 0.197$$

0,5/1

$g_1 > 0$ ->leicht positive Schiefe

Was in den Zeichnungen erkennbar ist:

- Die empirische Verteilungsfunktion steigt im oberen Bereich etwas langsamer an.
- Das Histogramm zeigt mehr Werte im unteren und mittleren Bereich, während der obere Bereich (ab 170 cm) dünner, aber vorhanden ist.
- Das gleitende Histogramm hat seinen maximal wert weiter links.

Aufgabe 39: Programmieraufgabe (R)

> Der in dem Foliensatz zur deskriptiven Statistik besprochene Datensatz zum ”Old Faithful“- Geysir ist in R mit dem Namen faithful enthalten. Veranschaulichen Sie sich die univariaten Verteilungen der beiden Variablen ”Eruptionsdauer“ und ”Wartezeit bis zum Ausbruch“ anhand geeigneter Kennzahlen und Graphiken.

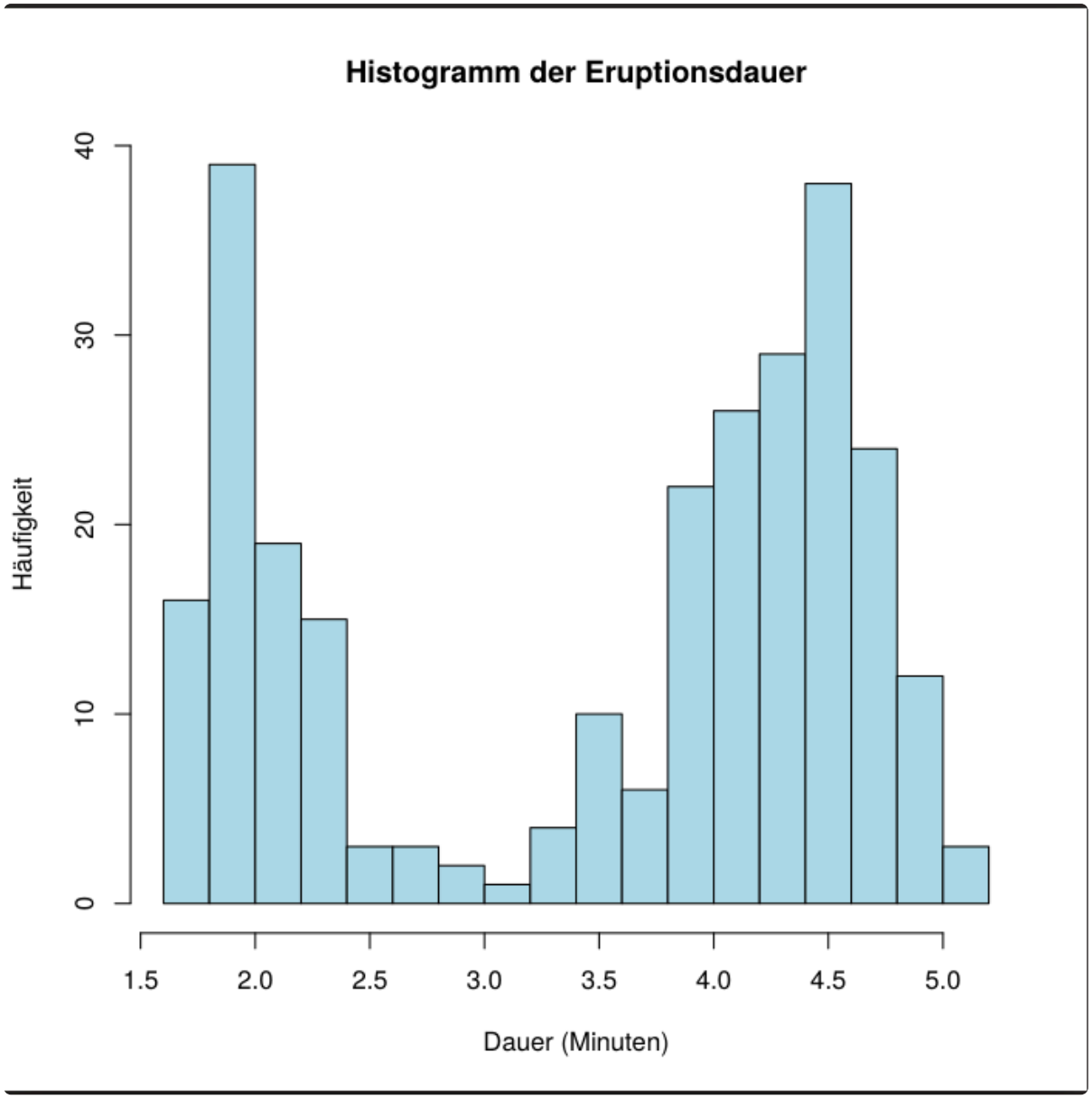
```
data("faithful")

cat("eruptions:\n")
cat("Min: ", min(faithful$eruptions), "\n")
cat("Max: ", max(faithful$eruptions), "\n")
cat("Standard Abweichung: ", sd(faithful$eruptions),
"\n")
```

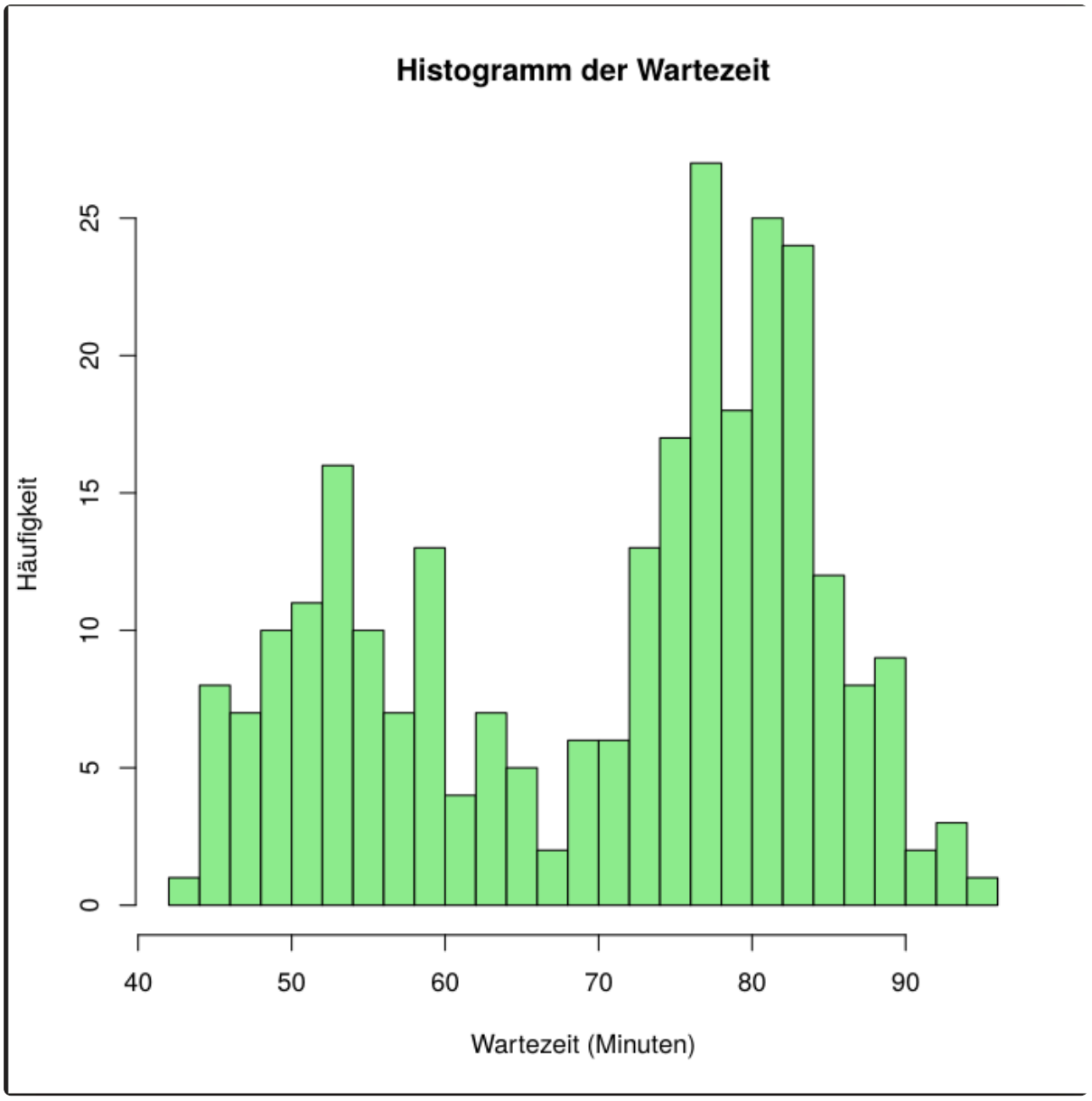
```r
cat("Mean: ", mean(faithful$eruptions), "\n")
cat("Median: ", median(faithful$eruptions), "\n")
cat("Mad: ", mad(faithful$eruptions), "\n")

cat("\nwaiting:\n")
cat("Min: ", min(faithful$waiting), "\n")
cat("Max: ", max(faithful$waiting), "\n")
cat("Standard Abweichung: ", sd(faithful$waiting), "\n")
cat("Mean: ", mean(faithful$waiting), "\n")
cat("Median: ", median(faithful$waiting), "\n")
cat("Mad: ", mad(faithful$waiting), "\n")

hist(faithful$eruptions, breaks = 20, col = "lightblue",
     main = "Histogramm der Eruptionsdauer",
     xlab = "Dauer (Minuten)", ylab = "Häufigkeit")

hist(faithful$waiting, breaks = 20, col = "lightgreen",
     main = "Histogramm der Wartezeit",
     xlab = "Wartezeit (Minuten)", ylab = "Häufigkeit")

plot(density(faithful$eruptions), main = "Dichte:
Eruptionsdauer", xlab = "Dauer (Minuten)", col = "blue")
plot(density(faithful$waiting), main = "Dichte:
Wartezeit", xlab = "Wartezeit (Minuten)", col =
"darkgreen")
```

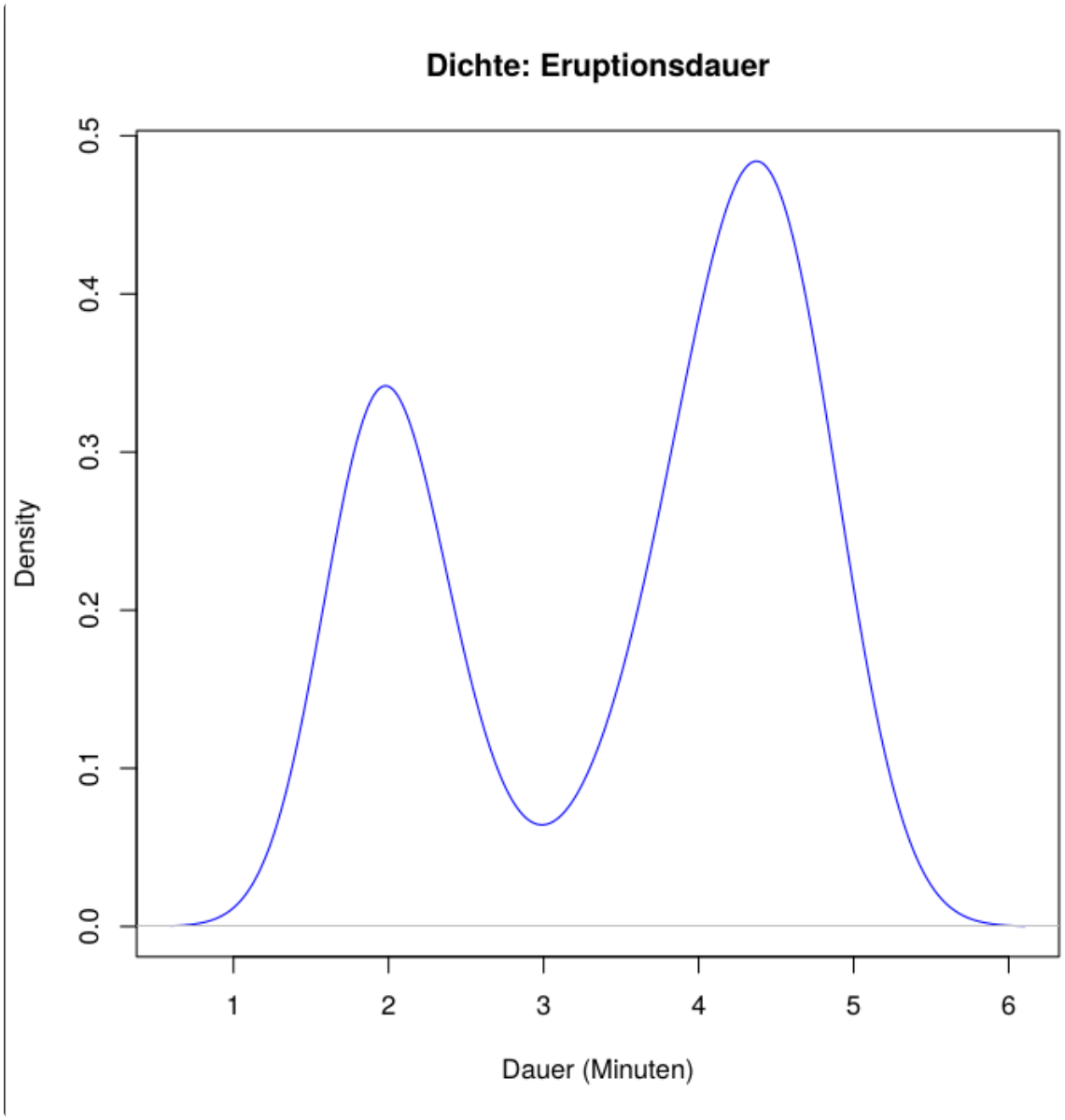
Output:

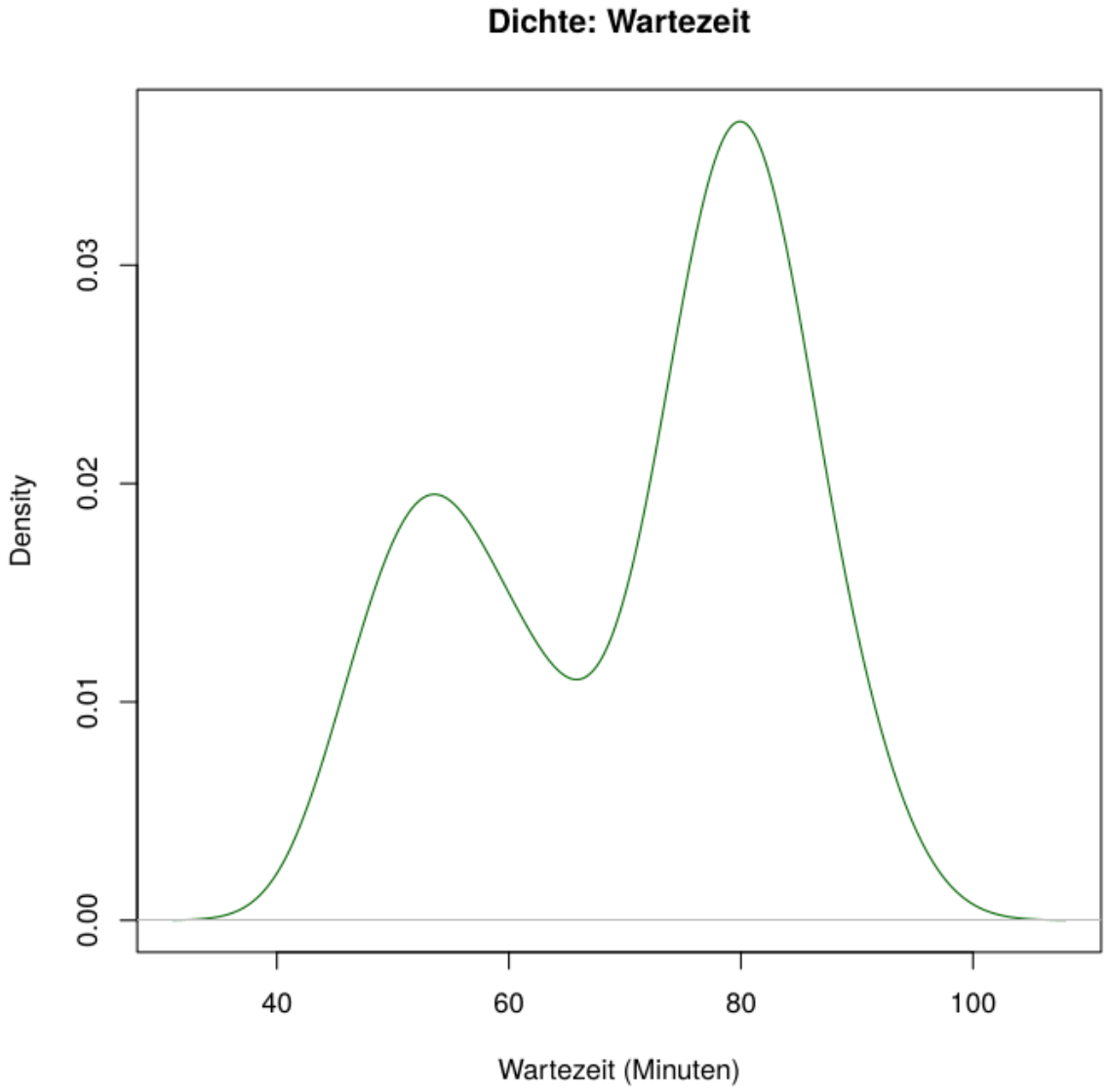
```
eruptions:
Min:  1.6
Max:  5.1
Standard Abweichung:  1.141371
Mean:  3.487783
Median:  4
Mad:  0.9510879
```

```
waiting:
Min:  43
Max:  96
Standard Abweichung:  13.59497
Mean:  70.89706
Median:  76
Mad:  11.8608
```




Histogramm der Wartezeit
Häufigkeit
0
5
10
15
20
25
40
50
60
70
80
90
Wartezeit (Minuten)


Dichte: Eruptionsdauer
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1
2
3
4
5
6
Dauer (Minuten)



4/4

40. Multiple Select-Aufgabe.

Betrachten Sie die folgenden Aussagen über empirische Verteilungen und empirische Verteilungsfunktionen.
Dazu seien $Y_1, \ldots, Y_n$ reellwertige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F von Y_1 und mit empirischer Verteilungsfunktion $\hat{F}_n$ von $Y_1, \ldots, Y_n$.

a) Falls $Y_1, \ldots, Y_n$ nicht stochastisch unabhängig sind, so kann es (mit nicht vernachlässigbarer Wahrscheinlichkeit) passieren, dass $\hat{F}_n$ die wahre Verteilungsfunktion F selbst für großes n nicht präzise approximiert.

Ja,
denn die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_n$ ist nur dann ein konsistenter Schätzer für F, wenn gewisse Voraussetzungen wie (mindestens asymptotische) Unabhängigkeit und identische Verteilung erfüllt sind. Nach welchem Satz?

0,5/1

> b) Falls $Y_1, \ldots, Y_n$ nominalskaliert sind, so lassen sich F und $\hat{F}_n$ nicht sinnvoll interpretieren.

Nein, Im Geiste der ersten Aufgabe, wie interpretiert Ihr P(X<= "Bremen")?
auch bei Nominalskalen ist $\hat{F}_n$ interpretierbar – nur die Ordnung ist nicht natürlich. Wenn keine Ordnung herrscht kann man im Allgemeinen keine sinnvolle Interpretation aus der empirischen Verteilungsfunktion ziehen.

0/1

> c) Falls $Y_1, \ldots, Y_n$ dichotom sind, so lässt sich $\hat{F}_n$ nicht sinnvoll interpretieren.

Nein,
Dichotome Zufallsvariablen nehmen nur zwei Werte an.
Auch in diesem Fall ist die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_n$ sinnvoll interpretierbar:
Sie gibt an, wie viele Beobachtungen kleiner oder gleich einem bestimmten Wert sind.

- Beispielsweise:

$$\hat{F}_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ p_n & \text{für } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

wobei p_n der Anteil der Nullen ist.

1/1

> d) Falls $Y_1, \ldots, Y_n$ intervallskaliert sind, so lässt sich aus $\hat{F}_n$ ein Histogramm der empirischen Verteilung von $Y1, \ldots, Yn$ ableiten.

Ja,
Intervallskalierte Daten besitzen eine sinnvolle Ordnung und Abstände, daher kann man aus der empirischen Verteilungsfunktion $\hat{F}_n$ die relative Häufigkeit in beliebigen Intervallen bestimmen:
Für ein Intervall $[a, b]$ gilt:

$$\text{relative Häufigkeit in } [a, b] = \hat{F}_n(b) - \hat{F}_n(a)$$

Damit lassen sich Balken eines Histogramms konstruieren, wenn die Daten in Klassen (z.B. Intervalle) eingeteilt werden.

1/1

13/16